Stabilità dei punti fissi

di una mappa scalare liscia.

Bibliografia

C. Mira, Chaotic Dynamics, World Scientific, Singapore (1987).

Esamineremo la stabilità degli equilibri di mappe scalari mediante il calcolo della derivata della funzione associata nel punto di equilibrio.
Consideriamo una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sufficientemente derivabile e la mappa scalare associata

$$(1.1) \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Sia x_e un punto di equilibrio, cioè un punto fisso della mappa (1.1):

$$(1.2) \qquad f(x_e) = x_e$$

Per studiare il comportamento della mappa in un intorno di x_e, sviluppiamo la funzione f in serie di Taylor in un intorno di x_e:

$$(1.3) \quad f(x) = f(x_e) + f'(x_e)(x - x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x - x_e)^2 + \dots + O((x - x_e)^n)$$

Tenendo conto della (1.2), la mappa (1.1) si può scrivere

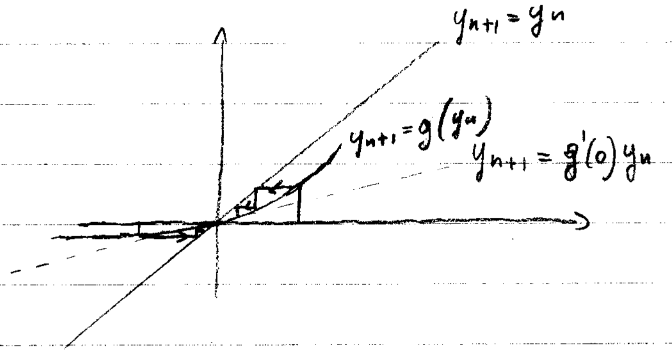
$$(1.4) \qquad x_{n+1} = x_e + f'(x_e)(x_n - x_e) + o((x_n - x_e)),$$

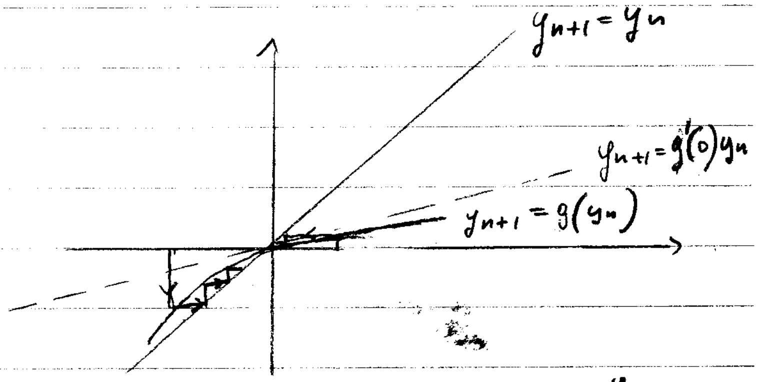
che, introducendo la variabile "scarto" $y_n := x_n - x_e$, diventa

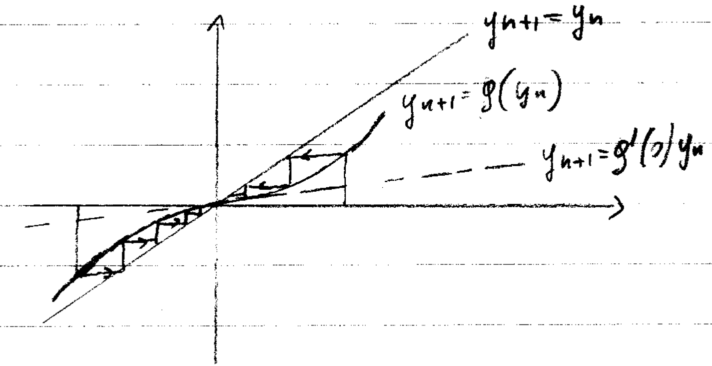
$$(1.5) \qquad y_{n+1} = g'(0)\, y_n + o(y_n) \qquad g(y) = f(y + x_e) - f(x_e)$$

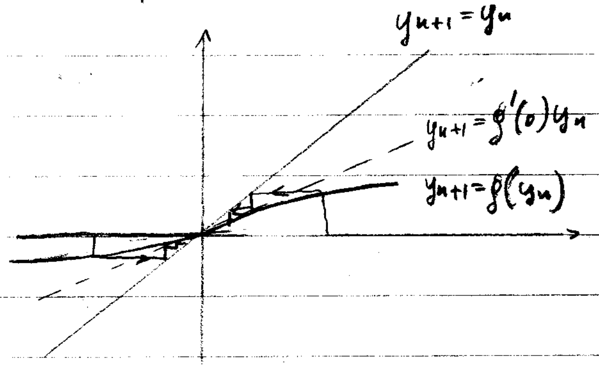
Quindi, l'equilibrio x_e di (1.1) corrisponde a $y_e = 0$ per la (1.5), la cui stabilità dipende dai valori assunti da g' in $y = 0$. Distinguiamo i casi seguenti.

a) $0 < g'(0) < 1 \Rightarrow y_e = 0$ è attrattivo

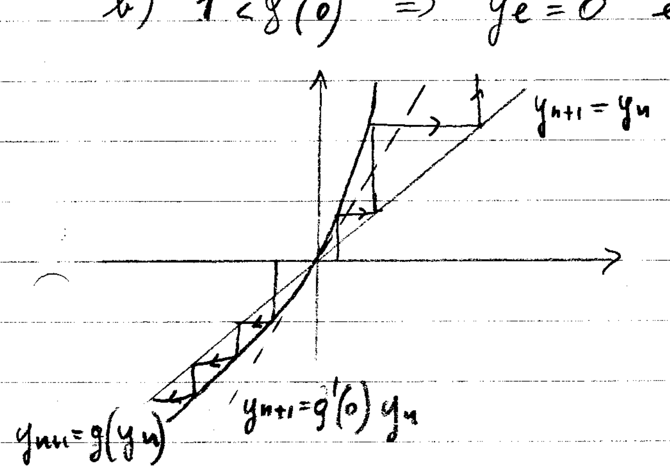


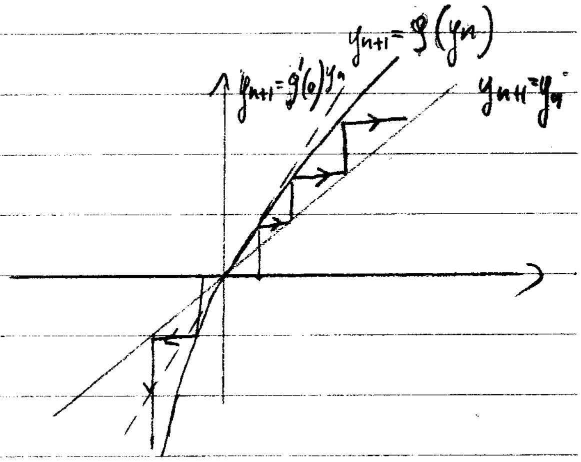


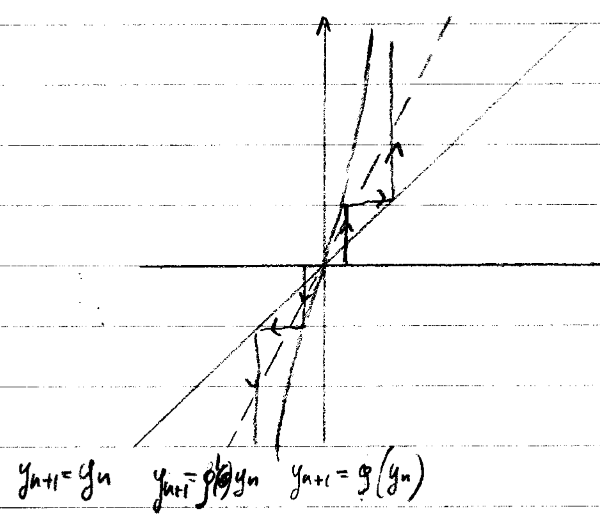


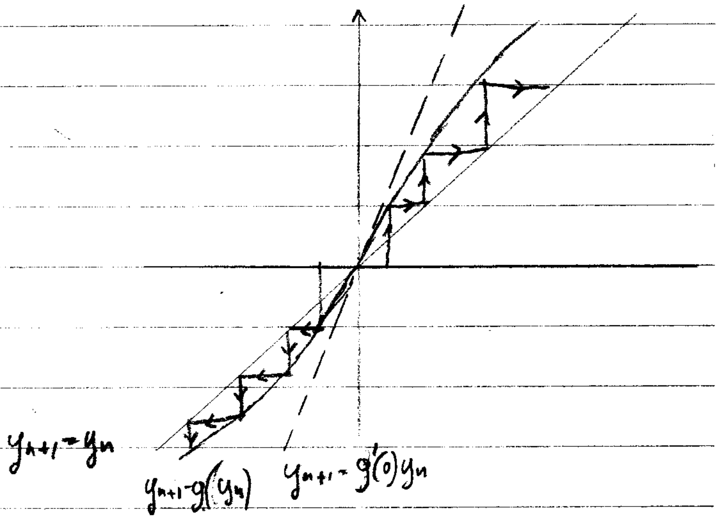


b) $1 < g'(0) \Rightarrow y_e = 0$ è repulsivo

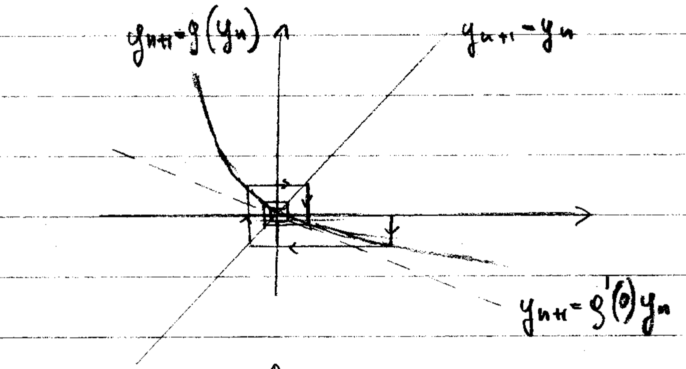


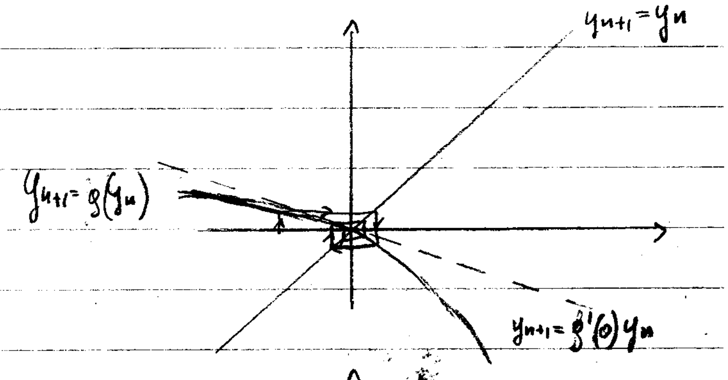


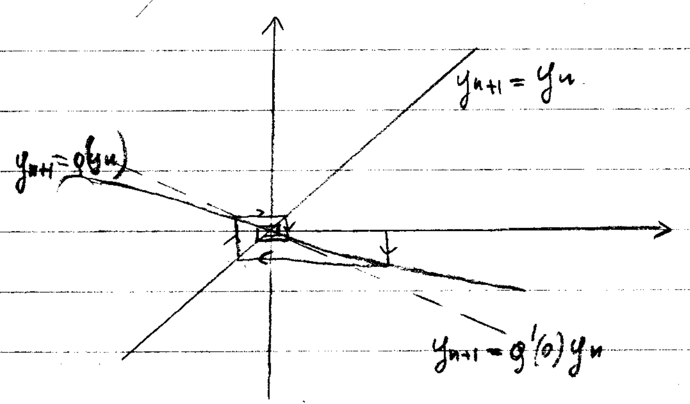


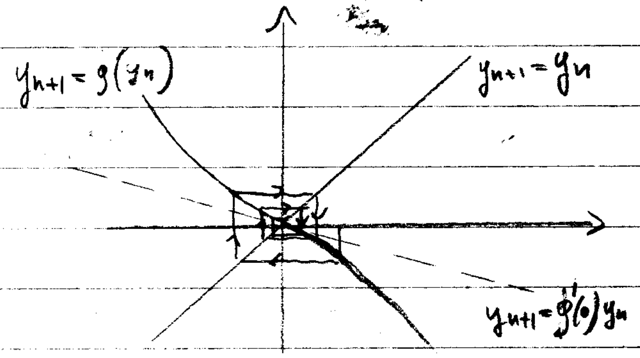


c) $-1 < g'(0) < 0 \Rightarrow y_e = 0$ è attrattivo

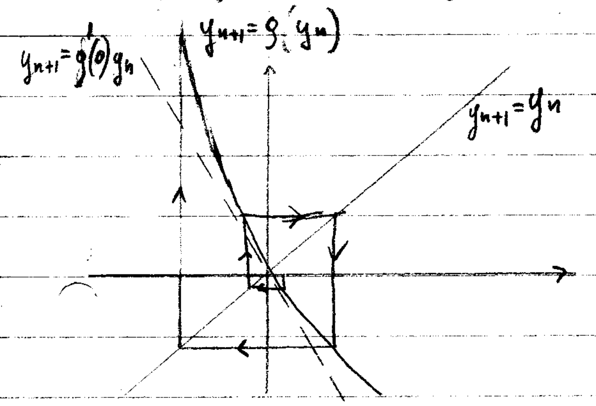


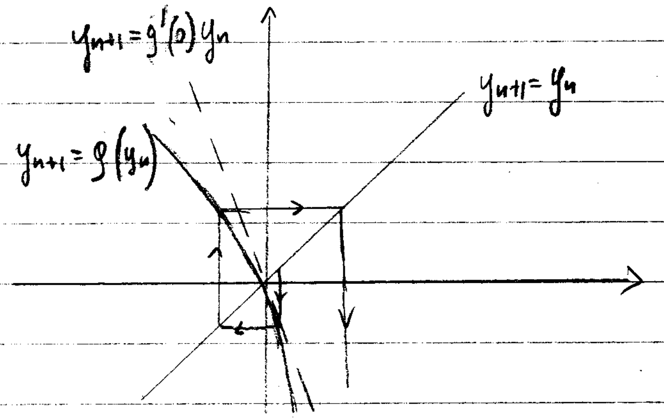


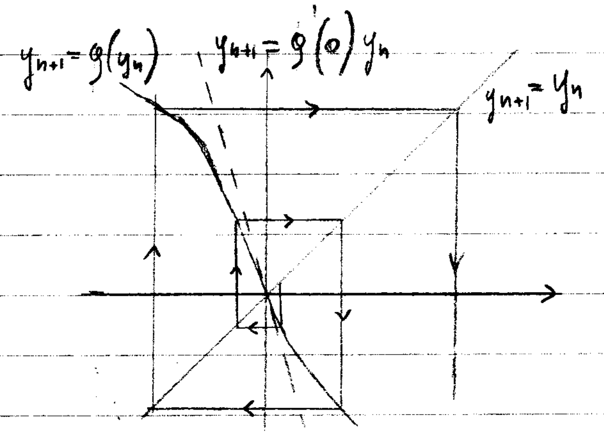


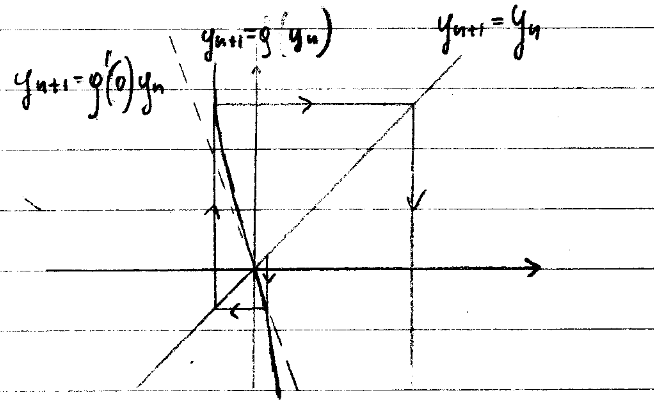


d) $g'(0) < -1 \Rightarrow y_e$ è repulsivo









N.B. A differenza dei casi a) e b) in cui le orbite che nascono in un opportuno intorno di y_e sono <u>monotone</u>, nei casi c) e d) le orbite sono <u>oscillanti</u>: oscillazioni "forzate" nel caso c) e oscillazioni "smorzate" nel caso d).

Le situazioni dei casi a), b), c), d) possono essere riassunte nel seguente teorema

<u>Teorema</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e x_e un equilibrio della mappa

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Allora:

i) se $|f'(x_e)| < 1$, x_e è asintoticamente stabile,

ii) se $|f'(x_e)| > 1$, x_e è instabile.

Per una dimostrazione più analitica si veda [HSD, pag. 330].
HK, pag. 73

N.B. Il Teorema suddetto non dà alcuna informazione nel caso in cui

$$|f'(x_e)| = 1$$

In tal caso, x_e è detto equilibrio <u>non iperbolico</u> e si analizza valutando le derivate successive.

<u>Esercizio</u> Verificare che il caso $f'(x_e) = 0$ rientra nel caso i)

Caso di equilibrio non iperbolico: $|f'(x_e)| = 1$

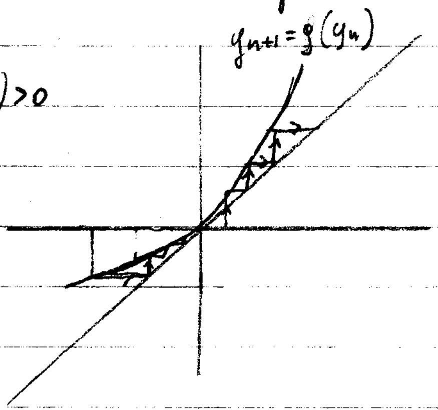
Distinguiamo i 2 sottocasi.

a) $f'(x_e) = 1$. Allora la mappa (1.5) diventa

(5.1) $$y_{n+1} = y_n + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}\, y_n^m + O(y_n^m) \qquad m>1$$

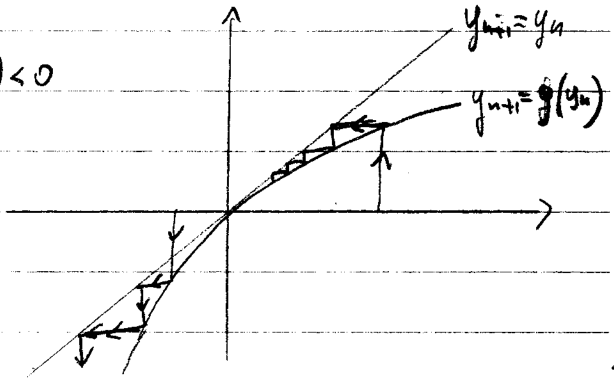
i) se m è pari

$g^{(m)}(0)>0$



sella

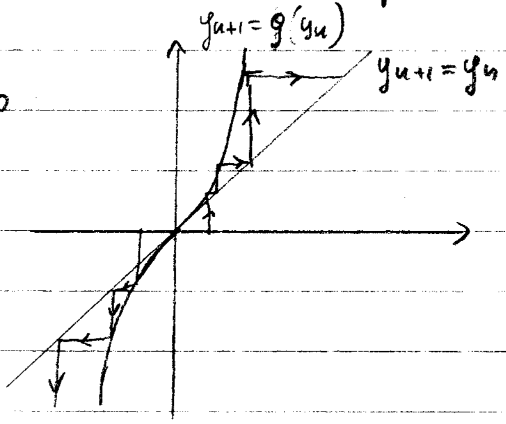
$g^{(m)}(0)<0$



sella

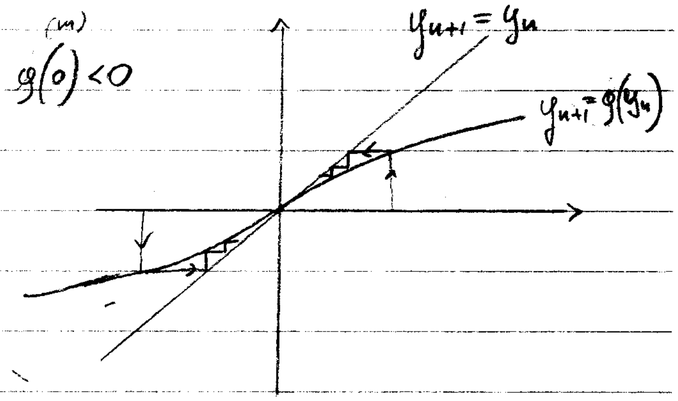
ii) se m è dispari

$g^{(m)}(0)>0$



repulsore

$g^{(m)}(0)<0$

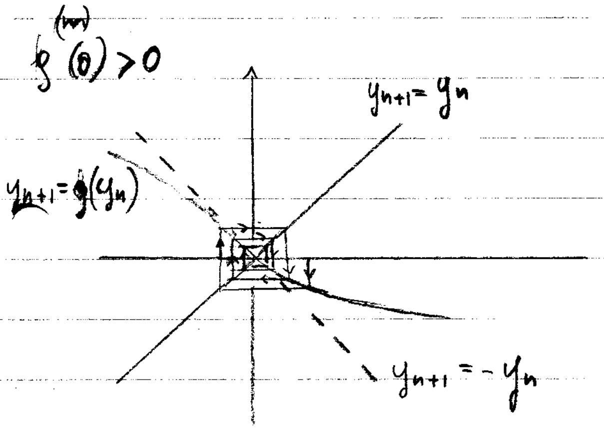


attrattore

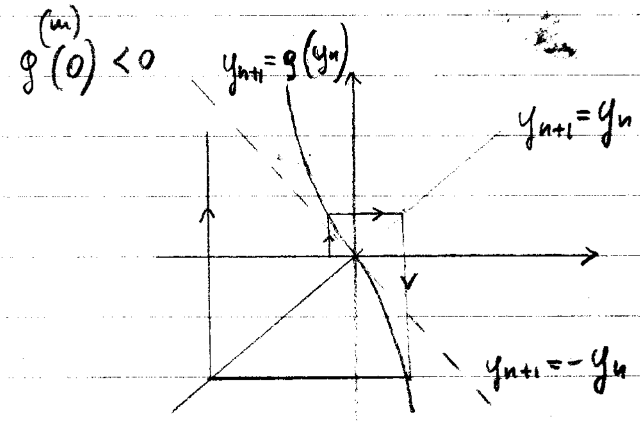
b) $f'(x_e) = -1$. Allora la mappa (1.5) diventa

$$y_{n+1} = -y_n + \frac{g^{(m)}(0)}{m!} y_n^m + \frac{g^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} y_n^{m+1} + O(y^{m+1}) \tag{6.1}$$

i) se m è dispari

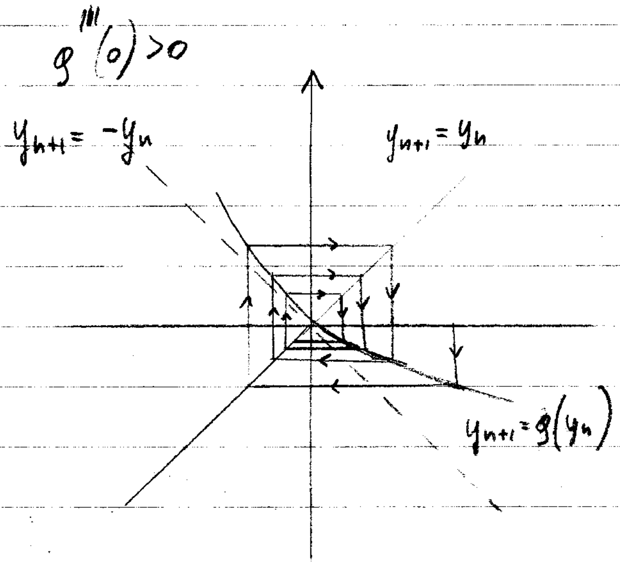


attrattore

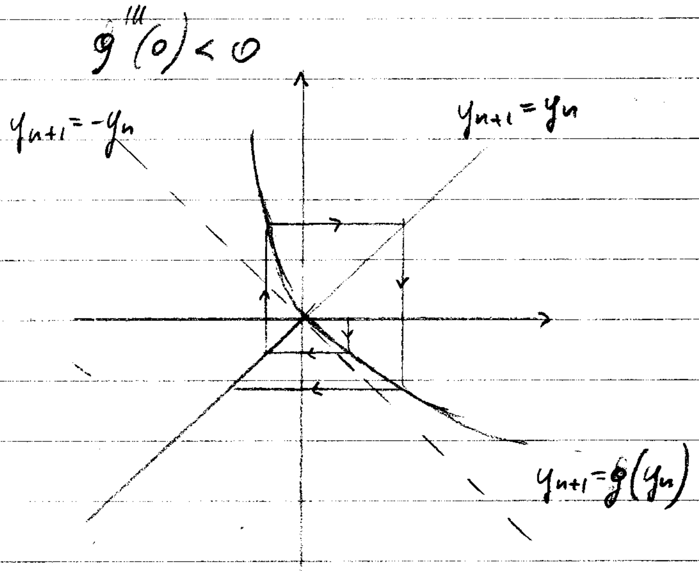


repulsore

ii) se m è pari il segno di $g^{(m)}(0)$ non basta a determinare la stabilità dell'equilibrio, come dimostrano gli esempi seguenti, entrambi con $g''(0) > 0$



attrattore



repulsore

Comunque, poiché sia in i) sia in ii) le orbite sono oscillatorie, conviene considerare separatamente le iterate pari

(7.1) $\{y_0, y_2, y_4, \dots, y_{2k}, \dots\}$

e le iterate dispari

(7.2) $\{y_1, y_3, y_5, \dots, y_{2k+1}, \dots\}$

che sono, entrambe, orbite <u>monotone</u> della mappa

(7.3) $$y_{n+1} = (g \circ g)(y_n) = g^2(y_n)$$

con dato iniziale y_0 e $y_1 = g(y_0)$, rispettivamente.
E' chiaro che $y_e = 0$ è un punto fisso anche della mappa (7.3).
(*) Inoltre se è un attrattore (rs. repulsore) per la mappa g^2, lo è anche per la mappa g (vedi N.B. pag. 8). Scriviamo esplicitamente la g^2, cioè l'iterata seconda della mappa (6.1). Distinguiamo 2 casi:

(7.4) se $m = 2$ $$y_{n+2} = g^2(y_n) = y_n - 2(a_1 + a_0^2)\, y_n^3 + o(y_n^3)$$

(7.5) se $m > 2$ $$y_{n+2} = g^2(y_n) = y_n - a_0\left(1-(-1)^m\right) y_n^m - a_1\left(1-(-1)^{m+1}\right) y_n^{m+1} + o(y_n^{m+1}),$$

dove $a_0 := g^{(m)}(0)/m!$ e $a_1 := g^{(m+1)}(0)/(m+1)!$.

In entrambi, $y_e = 0$ è un punto fisso non iperbolico con derivata prima $= 1$, cioè il caso a) di pag. 5.
Nel caso $m = 2$, la g^2 ha la forma (7.4), che corrisponde al caso a), sottocaso ii) se $(a_1 + a_0^2) \neq 0$. Quindi:

(7.6) se $m = 2$ e se $(a_1 + a_0^2)$
- $> 0 \Rightarrow$ attrattore
- $= 0 \Rightarrow$ caso dubbio
- $< 0 \Rightarrow$ repulsore

Invece, se $m > 2$ la g^2 ha la forma (7.5). Distinguiamo 2 casi:

se m è dispari $\quad y_{n+2} = y_n - 2a_0 y_n^m + O(y_n^{m+1})$

se m è pari $\quad y_{n+2} = y_n - 2a_1 y_n^{m+1} + O(y_n^{m+1})$

In entrambi i casi, il termine di grado inferiore (ma superiore a 1) è di grado dispari, corrispondente, di nuovo, al caso a), sottocaso ii) di pag. 5. Quindi, si ottiene:

se m è dispari e se a_0:
- $> 0 \Rightarrow$ attrattore
- $< 0 \Rightarrow$ repulsore

se m è pari e se a_1:
- $> 0 \Rightarrow$ attrattore
- $< 0 \Rightarrow$ repulsore

ciò dimostra che per m pari e $f'(x_e) = -1$, la stabilità di x_e è la stessa per f e f^2.

Ricapitolando, vale il seguente:

<u>Teorema</u> Sia x_e un punto fisso non iperbolico della mappa

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

e sia $f^{(m)}(x_e)$ la derivata non nulla di ordine più basso, con $m > 1$.
Vale la seguente tabella:

N.B. L'affermazione (*) di pag. 7 si basa sulla seguente:

<u>Prop.</u> Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica reale. Se la sottosuccessione con indici pari e quella con indici dispari convergono allo stesso limite allora anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge allo stesso limite. Vale anche il viceversa.

$f'(x_e) =$

- 1
  - m pari $\Rightarrow$ sella
  - m dispari
    - $f^{(m)}(x_e) > 0 \Rightarrow$ repulsore
    - $f^{(m)}(x_e) < 0 \Rightarrow$ attrattore
- -1
  - $m = 2$ et $\left(2 f'''(x_e) + 3\left(f''(x_e)\right)^2\right)$
    - $> 0 \Rightarrow$ attrattore
    - $= 0 \Rightarrow$ caso dubbio
    - $< 0 \Rightarrow$ repulsore
  - $m > 2$
    - pari et $f^{(m+1)}(x_e)$
      - $> 0 \Rightarrow$ attrattore
      - $=$
      - $< 0 \Rightarrow$ repulsore
    - dispari et $f^{(m)}(x_e)$
      - $> 0 \Rightarrow$ attrattore
      - $< 0 \Rightarrow$ repulsore

da cui segue immediatamente l'instabilità o la stabilità asintotica del punto fisso.