Misure di rischio

MISURE DI RISCHIO

& ASSICURATIVI

- obbiettivo: misurazione dei rischi finanziari al fine del loro controllo
- rischi: di mercato (tasso, cambio, . . .), credito, operativo, . . . ASSICURATIVI
- utilizzo:
  - ⋆ stabilire requisiti di capitale (interni o imposti dall'autorità di sorveglianza), e.g. Basilea, Solvency
  - ⋆ ordinare i vari fattori di rischio in base alla loro importanza
  - ⋆ comunicazione con i clienti (EG FONDI D'INVESTIMENTO)
  - ⋆ valutazione dell'efficacia di una strategia di copertura *
  - ⋆ stabilire margini nei mercati dei futures e delle opzioni
  - ⋆ stabilire limiti per i traders / unità operative
  - ⋆ allocazione del capitale fra diversi rami / unità / . . . → DECIDERE QUANTO BUSINESS PUÒ SVILUPPARE
  - ⋆ . . .

* CALCOLARE LA RIDUZIONE IN CAPITALE DA ALLOCARE SE UN PROGRAMMA DI COPERTURA VIENE IMPLEMENTATO

MISURE DI RISCHIO

- misure di rischio più comuni
  - varianza
  - Value-at-Risk
  - expected shortfall
  - misure basate su scenari
  - ...
- proprietà / relazioni tra queste misure? TEORICHE / IMPLICAZIONI PRATICHE
- metodi di calcolo
  - analitico (parametrico)
  - storico / Monte Carlo
- aggregazione di rischi (dipendenza) / modelli per rischi estremi

COPULE

TEORIA DEI VALORI ESTREMI

Perdita

DEFINIZIONE GENERICA!

- sia L una perdita; esempi:
  - ⋆ variazione di valore di un titolo / portafoglio:

$$L = -\text{P\&L}, \qquad \text{P\&L} = \text{profitto / perdita} = V(T) - V(t) \begin{matrix} >0 & P \\ < & L \end{matrix}$$

    con $V(t)$ valore del portafoglio in t
  - ⋆ perdita su un singolo contratto assicurativo ⊛ / portafoglio / ramo assicurativo / intera compagnia
- perdita relativa a un certo intervallo temporale (t, T): $L \equiv L_{t,T}$ $\neq L(t,T)$!
- perdita lorda / netta (al netto delle attività messe a copertura)
- $L \geq 0$: rischio puro; $L < 0$ and $L \geq 0$: rischio speculativo

(ASSICURATIVO) (FINANZIARIO)

⊛ CAPITALE DIFFERITO

$L = v^n 1_{T_x > n}$ o $L = v^n 1_{T_x > n} - \underbrace{\Pi}_{\text{PREMIO}}$

Misure di Rischio

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$:
Ω = insieme di stati del mondo
$\mathcal{F}$ = σ-algebra su Ω
$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ probabilità

- L è una variabile aleatoria in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

  modello per l'incertezza

- misura di rischio di L:

$$\rho(L) = \text{ capitale da allocare a } L \text{ per renderlo accettabile}$$

  la perdita post-allocazione è $L - \rho(L)$

- formalmente, sia $\mathcal{L}$ è un insieme di variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ contenente tutte le perdite di interesse
  - ⋆ $\mathcal{L}$ è uno spazio vettoriale contenente le costanti
  - ⋆ misura di rischio: funzionale

  (convenienza matematica)

$$\rho : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$$

Misure di Rischio

$* \forall L \in \mathcal{L} \; \exists \, \alpha_L, \beta_L \in \mathbb{R}$
$P(\alpha_L \leq L \leq \beta_L) = 1$

- esempi di $\mathcal{L}$ (spazio vettoriale contenente le costanti)
  - $\mathcal{L} = \{\text{variabili aleatorie su } (\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Value-at-Risk)
  - $\mathcal{L} = \{\text{variabili aleatorie integrabili su } (\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (Expected shortfall)
  - $\mathcal{L} = \{\text{variabili aleatorie quadrato integrabili su } (\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ (varianza)
  - $\mathcal{L} = \{\text{variabili aleatorie limitate su } (\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ *
  - $\mathcal{L} = \{\text{variabili aleatorie p-integrabili su } (\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ $(p \geq 1)$ → $E|L|^p < +\infty$
- quantità di interesse: capitale di rischio
  (RISK CAPITAL)

$$\rho(L) - E[L]$$

capitale allocato in eccesso alla perdita attesa (riserva)
→ PERDITE "NON ATTESE"

Misure di rischio basate su scenari

- molto popolari nella pratica $\rightsquigarrow$ margini per opzioni e futures, stress testing
- idea: dati un numero finito di scenari $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ e dei pesi $w_1, \dots, w_n \in \cancel{[0,1]}$ ≥ 0, non necessariamente di somma 1

$$\rho(L) = \rho(L; \{\omega_i\}, \{w_i\}) = \max\{w_1 L(\omega_1), \dots, w_n L(\overset{\omega_n}{\cancel{\text{omega}_n}})\}$$

$\rightsquigarrow$ approccio worst-case scenario (MASSIMA PERDITA SU UN N.O FINITO DI SCENARI)

- ad esempio
  - ⋆ ω_i = "tassi d'interesse ↑ 6%, tassi di cambio ↓ 20%, volatilità ↑ 15%, ..."
  - ⋆ ω_j = "shock nella mortalità +15% ..."
- sistema SPAN sviluppato dal Chicago Mercantile Exchange `https://www.cmegroup.com/clearing/risk-management/span-overview.html` e adottato da molti mercati di opzioni e futures → USA QUESTO APPROCCIO

MISURE DI RISCHIO BASATE SU SCENARI

* $P_i = w_i \delta_{\omega_i} + (1-w_i)\delta_{\omega'}$

$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$

** $P_i = \delta_{\omega_i}$

- generalizzazione (se esiste $\omega' \in \Omega$ tale che $L(\omega') = 0$, oppure se $w_i = 1$ per ogni i): date $P_1, \dots, P_n$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\rho(L) = \max\{E^{P_1}(L), \dots, E^{P_n}(L)\}$$

- più in generale ancora,

$$\rho(L) = \sup\{E^P(L) : P \in \mathcal{P}\},$$

dove $\mathcal{P}$ è un insieme di probabilità (scenari) su $(\Omega, \mathcal{F})$

"GENERALIZED SCENARIO BASED RISK MEASURES"

→ PEGGIOR PERDITA ATTESA

→ $\mathcal{P} = \{P\} \Rightarrow \rho(L) = E^P[L]$

→ RISCHIO DI MODELLO, $\mathcal{P}$ = FAMIGLIA DI MODELLI PER L

... CONTINUA

$$\rho(L) = \max\{w_1 L(\omega_1), \dots, w_m L(\omega_m)\}$$

$1 \geq w_i \geq 0$ PESI, $\omega_i \in \Omega$ SCENARI

$$\rho_1(L) = \max\{E^{P_1}(L), \dots, E^{P_m}(L)\}$$

$P_1, \dots, P_m$ PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$

ρ_1 GENERALIZZA (INCLUDE COME CASO PARTICOLARE ρ) SE

* ESISTE $\omega' \in \Omega : L(\omega') = 0$: BASTA PRENDERE

$$P_i = w_i \delta_{\omega_i} + (1 - w_i)\delta_{\omega'}$$

$$\underset{\text{SOTTO } P_i}{L =} \begin{cases} L(\omega_i) & w_i \\ L(\omega') = 0 & 1 - w_i \end{cases}$$

$$E^{P_i}(L) = w_i L(\omega_i)$$

... CONTINUA

** $w_i = 1$ PER OGNI i

BASTA PRENDERE

$P_i = \delta_{\omega_i}$ (TUTTA LA PROB SU ω_i)

$\Rightarrow E^{P_i}(L) = L(\omega_i)$

VaR, ES: "TAIL BASED RISK MEASURES"
→ EVENTI RARI

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

CALCOLO DI $\rho(L)$ SI BASA SU F_L, CHE PUÒ ESSERE STIMATA

- concentriamoci su misure di rischio invarianti rispetto alla distribuzione: per ogni $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ tali che $F_{L_1} = F_{L_2}$, allora $\rho(L_1) = \rho(L_2)$; non è il caso delle misure basate su scenari!

  SOTTO P

- X variabile aleatoria; funzione di ripartizione: $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F_X(x) = P(X \leq x)$
- proprietà caratterizzanti:
  - F_X non decrescente
  - F_X continua a destra
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- altre proprietà:
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $\lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X < x)$ $\leq F_X(x)$ SE < ↘
  - $F_X(x) - \lim_{y\uparrow x} F_X(y) = P(X = x)$ SE > 0 → F_X DISCONTINUA IN X

Value-at-Risk

- Value-at-Risk: importo (capitale) che se detenuto (riservato) permette di evitare perdite sull'orizzonte temporale con un certo livello di confidenza
- ingredienti:
  - ⋆ un certo intervallo temporale (t, T)
  - ⋆ un certo livello di confidenza $0 < \alpha < 1$ "ALTO"
- idea:
  - ⋆ per un dato capitale allocato x, siamo interessati all'evento

$$(L \leq x) = (L - x \leq 0)$$

L − X = PERDITA NETTA

cioè il capitale allocato assorbe le perdite
se $L = -\text{P\&L}$ è, allora l'evento è $(\text{P\&L} + x \geq 0)$

  - ⋆ la probabilità di tale evento non deve essere inferiore a α

$$P(L \leq x) \geq \alpha$$

REQUISITO "ECONOMICO": NON USARE PIÙ CAPITALE DEL NECESSARIO

  - ⋆ si sceglie poi il "minimo" capitale che garantisce tale condizione:

$$\boxed{\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ P(L \leq x) \geq \alpha\}}$$

IL CAPITALE HA UN COSTO!

QUANTILE $\equiv$ VaR

- data una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione F_X, il q-quantile sinistro $(0 < q < 1)$ è dato dall'inversa generalizzata

$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1,-}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \, F_X(x) \geq q\}$$

  il quantile $F_X^{-1,-}(q)$ lascia alla sua sinistra una probabilità almeno uguale a q

- il q-quantile destro $(0 < q < 1)$ è

$$F_X^{-1,+}(q) = \inf\{\underbrace{x \in \mathbb{R} : \, F_X(x) > q}_{\subset \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}}\}$$

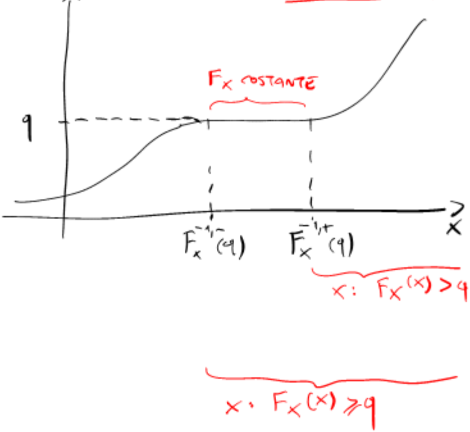
- in generale

$$F_X^{-1,-}(q) \leq F_X^{-1,+}(q)$$

  e $F_X^{-1,-}(q) < F_X^{-1,+}(q)$ se e solo se la funzione di ripartizione è costante al livello q; in questo caso, ogni numero di questo intervallo è chiamato q-quantile della distribuzione

VaR = QUANTILE SX (CONVENZIONE)

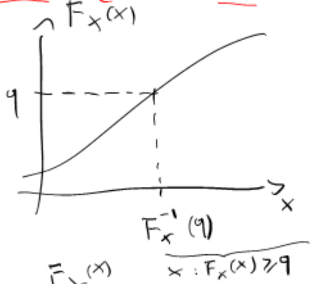
QUANTILE DX vs SX

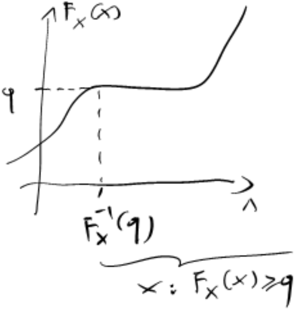


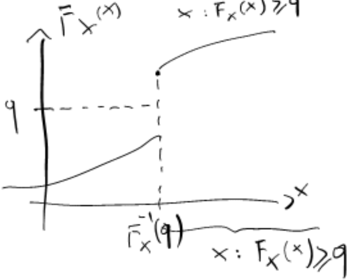
$$P\left(F_X^{-1,-}(q) \le X \le F_X^{-1,+}(q)\right) = 0$$

(caso non comune!)

QUANTILE (SX) DI UNA V.A.







QUANTILE

$*$ => $VaR_\alpha(L)$ ↑ CON α
(CAPITALE CRESCE CON IL LIVELLO DI CONFIDENZA)

▷ proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$, noto anche come inversa generalizzata della funzione di ripartizione F_X

- ⋆ $q \to F_X^{-1}(q)$ è non-decrescente, continua a sinistra $*$
- ⋆ limiti:

(ESSENZIALE)

$$\lim_{q \downarrow 0} F_X^{-1}(q) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 0\} =: \text{estremo inferiore di } X,$$

$$\lim_{q \uparrow 1} F_X^{-1}(q) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \ F_X(x) = 1\} =: \text{estremo superiore di } X \quad \boxplus$$

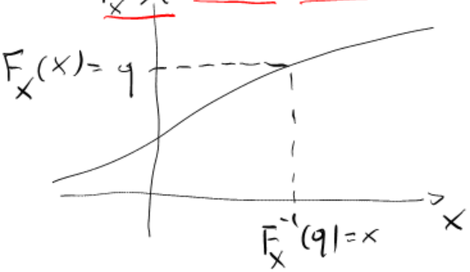
(ESSENZIALE)

- ⋆ F_X^{-1} continua ⇔ F_X crescente; F_X^{-1} crescente ⇔ F_X continua; discontinuità di F_X corrispondono a tratti di costanza di F_X^{-1}, e viceversa
- ⋆ se F_X è crescente e continua, allora tale è F_X^{-1} e coincide con l'inversa di F_X, definita da

$$F_X(x) = q \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(q)$$

$\boxplus$ = "MASSIMA PERDITA PROBABILE"

$F_X(x)$ CASO INVERTIBILE

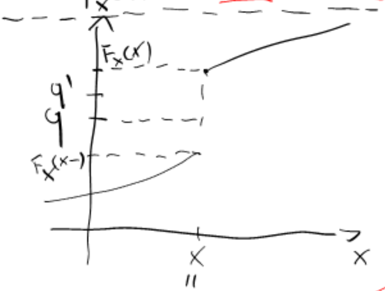


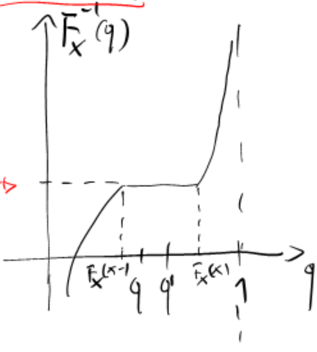
PER TROVARE L'INVERSA, RISOLVERE

$$F_X(x)=q$$

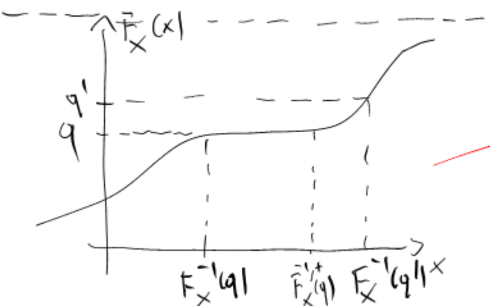
RISPETTO A x, DATO $0 \le q \le 1$

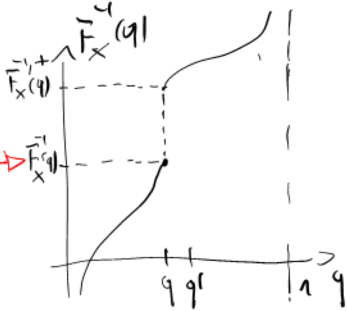
$F_X(x)$ CASO NON INVERTIBILE





$$F_X^{-1}(q) = F_X^{-1}(q')$$





QUANTILE

▷ proprietà del quantile sinistro $F_X^{-1}(q) \equiv F_X^{-1,-}(q)$

⋆ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $0 < q < 1$,

$$F_X^{-1}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F_X(x) \quad \oplus$$

PRENDI $x = F_X^{-1}(q)$ IN $\oplus$

conseguenza 1: per ogni $0 < q < 1$ riesce $F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q$; vale l'uguaglianza se F_X è continua in $x = F_X^{-1}(q)$

conseguenza 2: per ogni $x \in \mathbb{R}$ riesce $F_X^{-1}(F_X(x))) \leq x$; vale l'uguaglianza se F_X è crescente in x

PRENDI $q = F_X(x)$ IN $\oplus$

⋆ Trasformata funzione di ripartizione: se F_X è continua, allora $F_X(X) \sim U(0,1)$

⋆ Trasformata funzione di ripartizione inversa: se $U \sim U(0,1)$, allora $F_X^{-1}(U) \sim F_X$

⋆ se g è non decrescente, continua a sinistra, allora

$$F_{g(X)}^{-1}(q) = g(F_X^{-1}(q))$$

"il quantile di una trasformata è la trasformata del quantile"

UTILE IN MOLTE SITUAZIONI

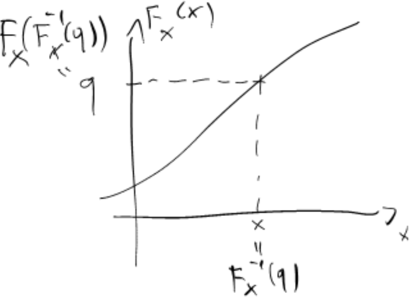
$\Rightarrow VaR_\alpha(f(L)) = f(VaR_\alpha(L))$ SE f CRESCENTE

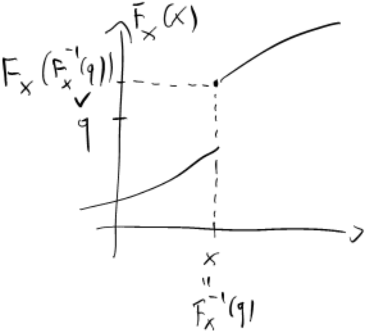
▷ Proprietà simili sono verificate dal quantile destro

CONSEGUENZA 1

$$F_X(F_X^{-1}(q)) \geq q \quad \forall q$$

$=$ SE F_X CONTINUA IN $F_X^{-1}(q)$

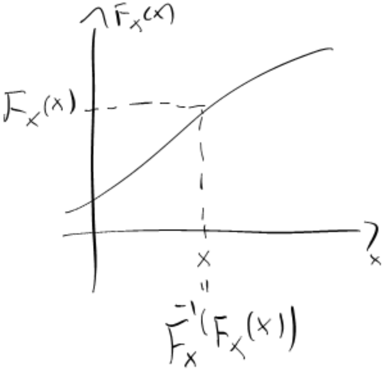


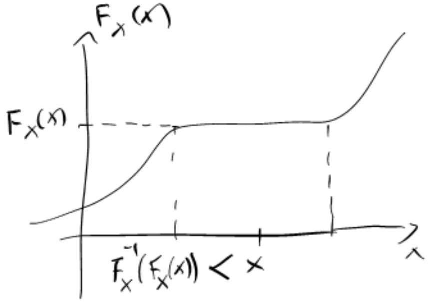


CONSEGUENZA 2

$$F_X^{-1}(F_X(x)) \leq x \quad \forall x$$

$= x$ SE F_X CRESCENTE IN x





TRASFORMATA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (SE F_X INVERTIBILE)

$$P(F_X(X) \le u) = P(\underbrace{F_X^{-1}(F_X(X))}_{=X} \le F_X^{-1}(u))$$

$$= P(X \le F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

$$\Rightarrow F_X(X) \sim U(0,1)$$

TRASFORMATA FUNZIONE DI RIPARTIZIONE INVERSA

$$P(F_X^{-1}(U) \le x) \overset{\oplus}{=} P(U \le F_X(x)) = F_X(x)$$

$$\Rightarrow F_X^{-1}(U) \sim X$$

ESEMPIO: $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

1) $F_X^{-1} = ?$ $\quad F_X(x) = q \iff 1 - e^{-\lambda x} = q$

$$\iff e^{-\lambda x} = 1 - q$$

$$\iff x = -\frac{1}{\lambda}\log(1-q)$$

$$= F_X^{-1}(q)$$

2) $F_X(X) = 1 - e^{-\lambda X} \sim U(0,1)$

$$P(1 - e^{-\lambda X} \leq u) = P(e^{-\lambda X} \geq 1 - u)$$

$$= P\left(X \leq -\frac{1}{\lambda}\log(1-u)\right)$$

$$= 1 - e^{-\cancel{\lambda}\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\log(1-u)\right)} = 1 - (1-u) = u$$

3) $U \sim U(0,1)$

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \sim X$$

$$P\left(-\frac{1}{\lambda}\log(1-U) \leq x\right) = P(\log(1-U) \geq -\lambda x)$$
$$= P(1-U \geq e^{-\lambda x})$$
$$= P(U \leq 1-e^{-\lambda x})$$
$$= 1-e^{-\lambda x}$$

4) METODO DELL' INVERSA

COME SIMULARE X?

i) SIMULA $U \sim U(0,1)$

ii) CALCOLA $X = F_X^{-1}(U)$

5) SE F_X NON CONTINUA, $F_X(X) \neq U(0,1)$

$$X = \begin{cases} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases} \quad \text{(BERNOULLI)}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$F_X(X)$?

$X = 0 \qquad F_X(0) = 1/2$

$X = 1 \qquad F_X(1) = 1$

$$F_X(X) = \begin{cases} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases}$$

$\neq U(0,1)$

VALUE-AT-RISK

- il Value-at-Risk è quindi un quantile della distribuzione della perdita L / inversa generalizzata di L:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_L(x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha)$$

- usando la distribuzione del profit/loss P&L $= -L$, è *

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P(\underbrace{\mathrm{P\&L} < x}_{\text{ROVINA SE TOLGO x DAL PORTAFOGLIO}}) \leq 1-\alpha\}$$

perdite superiori a VaR_α si possono verificare con probabilità inferiore a $1-\alpha$

- nel caso in cui la distribuzione di L sia invertibile, la definizione richiede

$$P(L \leq \mathrm{VaR}_\alpha(L)) = \alpha$$

o

$$P(\overbrace{\mathrm{P\&L} \leq -\mathrm{VaR}_\alpha(L)}^{\mathrm{P\&L} + \mathrm{VaR}_\alpha(L) \leq 0}) = 1-\alpha$$

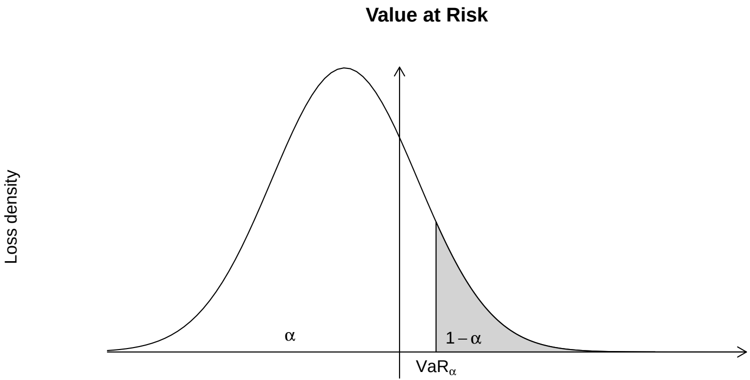
cioè

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha) = -F_{\mathrm{P\&L}}^{-1}(1-\alpha)$$

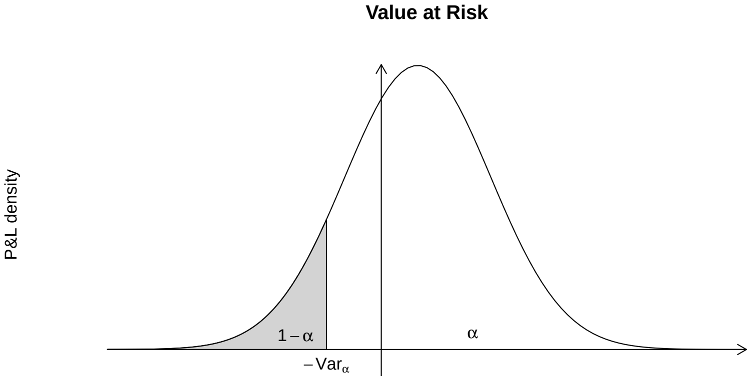
$$
\begin{aligned}
VaR_\alpha(L) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(L \leq x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(-P\&L \leq x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(P\&L \geq -x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : 1 - P(P\&L < -x) \geq \alpha\} \\
&= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(P\&L < -x) \leq 1-\alpha\} \\
&= \inf\{-y \in \mathbb{R} : P(P\&L < y) \leq 1-\alpha\} \\
&= -\sup\{y \in \mathbb{R} : \underline{P(P\&L - y < 0) \leq 1-\alpha}\}
\end{aligned}
$$

MAX IMPORTO CHE POSSO ESTRARRE DAL PORTAFOGLIO E MANTENERE LA PROB. DI ROVINA $\leq 1-\alpha$

Value-at-Risk



Value-at-Risk



Solvency II e Value-at-Risk

- requisito di capitale in Solvency II = "the level of capital that enables the insurer to meet its obligations over a one-year time horizon with a high (99.5%) confidence level."
- bilancio semplificato di un assicuratore:
  - ⋆ $A(t)$ = valore (di mercato) in t delle attività: azioni, obbligazioni, beni immobili, ...
  - ⋆ $B(t)$ = valore (di mercato) in t delle passività: riserve + margine per rischi non hedgeable (~ FAIR VALUATION)
  - ⋆ $V(t) = A(t) - B(t)$ = Net Assets Value (NAV)=Own Funds (SOLVENCY)
- requisito di capitale in SII: partiamo da

99.5%

$$C = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(V(t+1) + x(1 + L(t,t+1)) \geq 0) \geq \alpha\}$$

con $L(t,t+1)$ tasso semplice privo di rischio su $(t,t+1)$, da cui

$$\text{SCR} = \boxed{\text{capitale richiesto} \overset{\text{DEF}}{=} V(t) + C = \text{VaR}_\alpha(L)}$$

dove $L = \boxed{V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)}}$; VARIAZIONE IN NAV (ATTUALIZZATA)

- se $C < 0$ (la compagnia è ben capitalizzata) $\rightsquigarrow$ $-C$ = capitale in eccesso (EXCESS CAPITAL) $\Leftrightarrow V(t) > \text{VaR}_\alpha(L)$

$$V(t+1) + x(1+L(t,t+1)) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{B(t+1)}_{\text{PASSIVITÀ}} \leq \underbrace{A(t+1) + x(1+L(t,t+1))}_{\text{ATTIVITÀ + CAPITALE ALLOCATO IN } t \text{ + INTERESSE}}$$

<u>OSS:</u>

$$\big(V(t+1) + x(1+L(t,t+1)) \geq 0\big) =$$

$$= \Big(V(t+1) + \big(x - V(t) + V(t)\big)(1+L(t,t+1)) \geq 0\Big)$$

$$= \Bigg(\underbrace{V(t) - \frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)}}_{=:\, L} \leq x + V(t) \Bigg)$$

...CONTINUA

$$C = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(V(t+1) + x(1+L(t,t+1)) \geq 0) \geq \alpha\}$$

$$= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(\underbrace{L}_{= -\Delta NAV = -\left(\frac{V(t+1)}{1+L(t,t+1)} - V(t)\right)} \leq x + V(t)) \geq \alpha\}$$

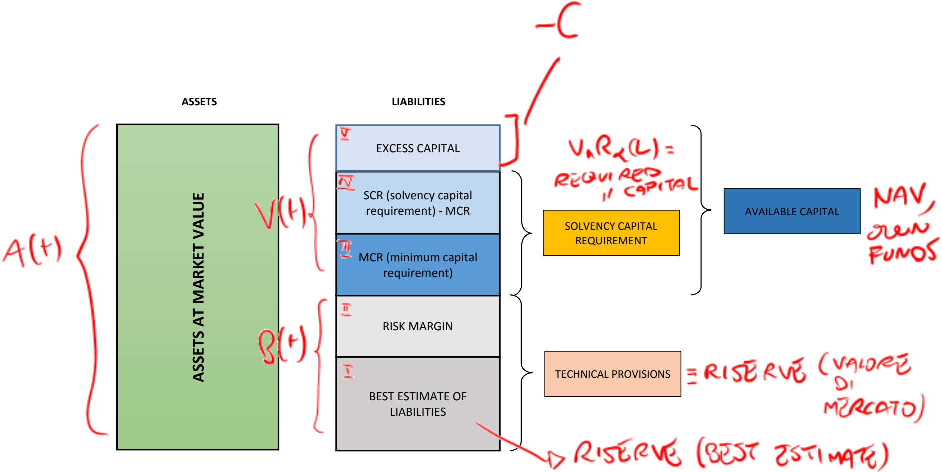
$$= \inf\{y - V(t) \in \mathbb{R} \mid P(L \leq y) \geq \alpha\}$$

$$= VaR_\alpha(L) - V(t)$$

$$\Rightarrow C + \underbrace{V(t)}_{NAV(t)} = \underbrace{VaR_\alpha(L)}_{SCR}$$

SE $C < 0 \iff NAV(t) > SCR \iff -C = NAV(t) - SCR$
$= \text{EXCESS CAPITAL}$

Solvency II Balance Sheet



Value-at-Risk

- elementi costituenti il Value-at-Risk:
  - orizzonte temporale $T - t$
  - livello di confidenza α
  - distribuzione di probabilità della perdita L o del profitto/perdita P&L
- orizzonte temporale: scelto dall'utilizzatore in base al business
  - scelte tipiche: 1 ora / 1 giorno / 10 giorni (2 settimane) / 1 anno
  - portafogli frequentemente ribilanciati: 1 giorno
  - trading desks: intraday VaR, 1 ora
  - Solvency, Basilea: 1 anno
  - tipicamente, VaR cresce con l'orizzonte temporale

Value-at-Risk

- livello di confidenza: dipende dall'appetito per il rischio o fissato dal autorità di sorveglianza
  - ⋆ usualmente $90\% < \alpha < 100\%$
  - ⋆ trading floors: $\alpha = 90\%$
  - ⋆ calcolo del margine di solvibilità/capitale economico: 95%, 99.5% (evento "1 su 20", "1 su 200") → ATTENZIONE ALL'INTERPRETAZIONE! ⊗

    1 DEFAULT DI UNA COMPAGNIA OGNI 200 ANNI, O 1 DEFAULT DI UNA COMPAGNIA SU 200 IN 1 ANNO
  - ⋆ il Value-at-Risk cresce con α
- la costruzione della distribuzione di probabilità di L o P&L è lasciata all'utilizzatore: approcci più comuni
  - ⋆ parametrico
  - ⋆ non parametrico (historical VaR, bootstrapping)
  - ⋆ semi-parametrico (teoria dei valori estremi)

⊗ RICHIEDE EVENTI IID!

⊗ $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$

EVENTI IID (INDIPENDENTI, STESSA PROB)

$P(E_i) = \alpha$

T = TEMPO DI ATTESA PER VEDERE VERIFICARSI IL PRIMO EVENTO

$\sim$ GEOMETRICA(α)

$$P(T=k) = (1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha$$

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}$$

α	$E(T)$	
5%	20	"UNO SU 20"
1%	100	
0.5%	200	
0.1%	1000	

Approccio parametrico

- approccio parametrico: scegliere una distribuzione da una famiglia parametrica (normale, lognormale, t-student, ...) $F_L(\cdot;\theta)$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ parametro (da stimare) poi calcolare

$$\rho(L;\theta) = \rho(F_L(\cdot,\theta))$$

(PER UNA MISURA DI RISCHIO INVARIANTE RISPETTO ALLA DISTRIBUZIONE)

analiticamente o numericamente

- nel caso del Value-at-Risk, si deve calcolare

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha;\theta) \quad \text{o} \quad F_L(\mathrm{VaR}_\alpha(L);\theta) = \alpha \text{ se invertibile}$$

F_L

quindi si ottiene $\mathrm{VaR}_\alpha(L;\theta)$

- problemi del metodo parametrico:
  - ⋆ rischio di modello → SCELTA DI F_L "SBAGLIATA"
  - ⋆ rischio di parametro → $\hat{\theta}$ STIMATO $\neq \theta_0$ "VERO"

$\Rightarrow F_L(\cdot,\hat{\theta}) \neq F_L(\cdot,\theta_0) \Rightarrow \widehat{\mathrm{VaR}}_\alpha(L) \neq \mathrm{VaR}_\alpha(L)_0$

Value-at-Risk

- ▷ VaR con distribuzione esponenziale $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha) = \overbrace{K_\alpha}^{-\log(1-\alpha)} \cdot E[L]$$

- ▷ VaR con distribuzione normale: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ⋆ indicando con Φ e Φ^{-1} la funzione di ripartizione e la sua inversa (quantile) della normale standard

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$$

  - ⋆ Value-at-Risk $\uparrow \mu$, $\uparrow \sigma$ (se $\alpha > 50\%$)
  - ⋆ $\rho(L) - E(L) =$ capitale di rischio
    nel caso di VaR con distribuzione normale
    $\underbrace{\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E(L)}_{} = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \rightsquigarrow$ "VaR $= SD$" nel caso normale

CAPITALE DI RISCHIO $= K_\alpha \cdot \sigma$

VaR NEL CASO NORMALE

$$L \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$x = VaR_\alpha(L) : \quad F_L(x) = \alpha$$

$$\iff P(L \leq x) = \alpha$$

$$\iff P\Big(\underbrace{\frac{L-\mu}{\sigma}} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \alpha$$

$$\iff P\Big(N(0,1) \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \alpha$$

$$\iff \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \alpha$$

$$\iff \frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$\iff x = VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

Value-at-Risk

▷ Sia F una funzione di ripartizione; la famiglia scala-locazione associata a F è la famiglia di funzioni di ripartizione

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

ASIMMETRIA, CURTOSI NON CAMBIANO

- ⋆ se X ha funzione di ripartizione F, allora Y ha funzione di ripartizione $F_{\mu,\sigma}$ se e solo se Y e $\mu + \sigma X$ hanno la stessa distribuzione
- ⋆ si dice che X e Y sono dello stesso tipo o che differiscono per un cambio di scala (σ) e locazione (μ)

OGNI ALTRO PARAMETRO E' DI FORMA

▷ se $F_L = F_{\mu,\sigma}$ allora $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma \underbrace{F^{-1}(\alpha)}_{\mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{L})}$

$\tilde{L} \sim F$

ESEMPI
- DISTANZA IN METRI \ KM
- IMPORTO IN € \ $ (SE IL TASSO DI CAMBIO È NOTO)

ESEMPI
- TEMPERATURA IN CELSIUS O FARENHEIT

Value-at-Risk

- alternativa alla distribuzione normale: t di Student, con code più pesanti rispetto alla normale (cmq simmetrica)
- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, dove t_ν distribuzione t di Student con $\nu > 1$ gradi di libertà
  - ⋆ se ν intero, allora

$$t_\nu \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z_1^2+\ldots+Z_\nu^2}{\nu}}} \sim \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}}}$$

    dove $Z, Z_1, \ldots, Z_\nu$ sono normali standard indipendenti
  - ⋆ in generale, la densità di t_ν è (ν NON NECESSARIAMENTE INTERO)

$$f_{t_\nu}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  - ⋆ più piccolo è ν, più pesanti sono le code; quando ν è grande, $t_\nu \approx N(0,1)$
  - ⋆ momenti: $E[t_\nu] = 0$, $var[t_\nu] = \frac{\nu}{\nu-2}$ per $\nu > 2 \Rightarrow E[L] = \mu$, $var[L] = \frac{\sigma^2\nu}{\nu-2}$

Value-at-Risk

- VaR con distribuzione t di Student: $L \sim \mu + \sigma t_\nu$
  - con calcolo simile al caso normale,

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)$$

- Esempio: confronto tra $\mathrm{VaR}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	12.82	16.45	23.26	25.76	30.90
t Student - ν					
10.0	12.27	16.21	24.72	28.35	37.06
4.0	10.84	15.07	26.49	32.56	50.72
2.5	7.74	11.44	23.94	32.04	61.81
2.1	4.03	6.17	14.25	20.00	43.36

↑ con α

↑ ↘ rispetto a ↙

→ ↑ con α

più peso sulla coda ($\nu \downarrow 2$) ⇒ $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ ↑ se α è grande

Value-at-Risk

$$= \mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{EXP}(N(\mu,\sigma^2)))$$
$$= \mathrm{EXP}(\mathrm{VaR}_\alpha(N(\mu,\sigma^2)))$$

VaR DI UNA FUNZIONE È LA FUNZIONE DEL VaR (SE ↑)

▷ VaR per una distribuzione lognormale, $L = \exp(N(\mu, \sigma^2))$

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \exp(\mu + \sigma \Phi^{-1}(\alpha))$$

▷ VaR per una distribuzione Pareto, $L \sim \mathrm{Pareto}(\beta, \lambda)$

DISTRIBUZIONE A CODA PESANTE

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta, \; x \geq 0,$$

$$1 - F_L(x) = P(L > x) = \frac{H(x)}{x^\beta}$$

con $\lambda > 0$, $\beta > 0$; riesce

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \lambda \underbrace{\left[(1-\alpha)^{-1/\beta} - 1\right]}_{\downarrow \text{ con } \beta}$$

CON $H(x)$ FUNZIONE "A VARIAZIONE LENTA"

PIÙ PICCOLO β, PIÙ PESANTE LA CODA ($P(L>x) \to 0$ PIÙ LENTAMENTE)

VaR PER DISTRIBUZIONE DI PARETO

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\beta} = q$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\beta} = 1 - q$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda + x} = (1-q)^{1/\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda + x}{x} = (1-q)^{-1/\beta}$$

$$\Leftrightarrow x = F^{-1}(q) = VaR_q(L) = \lambda\left[(1-q)^{-1/\beta} - 1\right]$$

Value-at-Risk: limiti

VaR NON PREMIA (SEMPRE) LA DIVERSIFICAZIONE

- 1) ▷ il Value-at-Risk non è subadittivo: esistono perdite L_1, L_2 tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ $\rightsquigarrow$ non è coerente (VEDREMO IN SEGUITO)
- 1') ▷ similmente, il Value-at-Risk non è convesso: esistono perdite L_1, L_2 e $0 < \lambda < 1$ tali che $\mathrm{VaR}_\alpha(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) > \lambda\,\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \underbrace{}_{1-\lambda}\mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$
- 2) ▷ il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita → OLTRE IL VaR, NON SO QUANTO PERDO
- 3) ▷ il Value-at-Risk non è robusto: variazioni piccole in F_L possono risultare in variazioni importanti del Value-at-Risk → RISCHIO DI MODELLO E DI PARAMETRO!
- ▷ di conseguenza diverse misure di rischio alternative al Value-at-Risk sono state proposte ⇒ Expected-Shortfall viene usata spesso in pratica come alternativa al Value-at-Risk → È COERENTE
- ▷ le limitazioni elencate sopra vengono attenuate se ci si restringe a opportuni insiemi di perdite $\mathcal{L}$

Value-at-Risk e subadditività

- il Value-at-Risk non soddisfa la subadditività (e convessità) ⇒ esistono L_1, L_2 tali che

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1 + L_2) > \mathrm{VaR}_\alpha(L_1) + \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

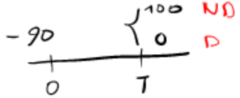
  aggregare due rischi richiede più capitale che detenere i due rischi separatamente

  TCN

- ESEMPIO: due bond soggetti a rischio di default, con uguali caratteristiche
  - prezzo 90
  - valore facciale 100
  - perdita totale in caso di default (ZERO RECOVERY)
  - probabilità di default 4%
  - il default del primo e secondo bond sono indipendenti
  - riesce $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) = \mathrm{VaR}_{95\%}(L_2) = -10$ mentre $\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1 + L_2) = 80$
- problema: la distribuzione della perdita è fortemente asimmetrica
- ESEMPIO: mostrare che per ogni $0 < \lambda < 1$, $\mathrm{VaR}_{95\%}(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) > \lambda\,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_1) + (1-\lambda)\,\mathrm{VaR}_{95\%}(L_2)$

VaR non è subadditivo

$$L_1 = \begin{cases} -10 & 96\% \quad \text{(no default)} \\ 90 & 4\% \quad \text{(default)} \end{cases} = L_2$$



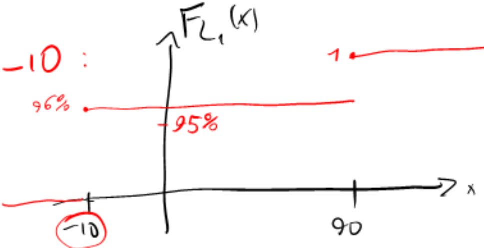
Distribuzione congiunta

L_1 \ L_2	-10	90
-10	92.16%	3.84%
90	3.84%	0.16%

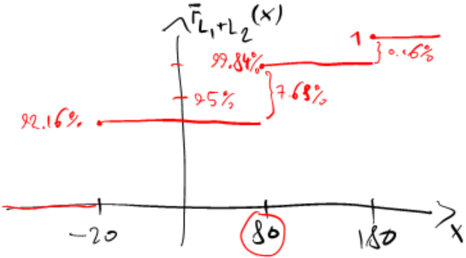
Evento	Prob
2 default	$4\% \cdot 4\% = 0.16\%$
1 default	$2 \cdot 96\% \cdot 4\% = 7.68\%$
0 default	$96\% \cdot 96\% = 92.16\%$

$$VaR_{95\%}(L_1) = VaR_{95\%}(L_2) = -10$$

$\alpha = 95\%$



$$VaR_{95\%}(L_1 + L_2) = 80 > (-10) + (-10) = -20$$



$$L_1 + L_2 = \begin{cases} -20 & 92.16\% \\ 80 & 7.68\% \\ 180 & 0.16\% \end{cases}$$

$L_1 + L_2$: ACQUISTA ENTRAMBE LE OBBLIGAZIONI

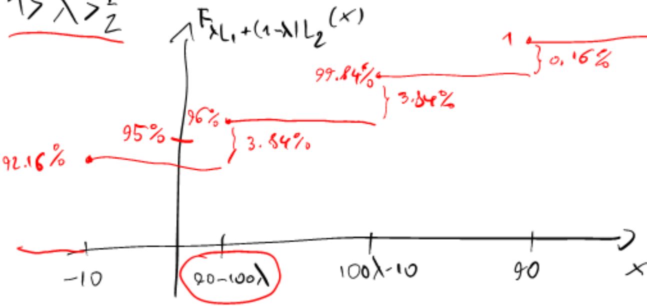
CAPITALE ALLOCATO > SOMMA DEI CAPITALI DA ALLOCARE ALLE 2 OBBLIGAZIONI SEPARATE

⇒ NO BENEFICIO PER LA DIVERSIFICAZIONE

VaR non è convesso

$$\underbrace{\lambda L_1 + (1-\lambda) L_2}_{\substack{\text{compra } \lambda \text{ unità} \\ \text{del primo bond,} \\ 1-\lambda \text{ del secondo}}} = \begin{cases} \lambda(-10) + (1-\lambda)(-10) = -10 & 92.16\% \\ -10\lambda + 90(1-\lambda) \\ \quad = 90 - 100\lambda & 3.84\% \\ 90\lambda - 10(1-\lambda) \\ \quad = 100\lambda - 10 & 3.84\% \\ \lambda \cdot 90 + (1-\lambda)\cdot 90 = 90 & 0.16\% \end{cases}$$

$1 > \lambda > \frac{1}{2}$



$$VaR_{95\%}(\lambda L_1 + (1-\lambda) L_2) = 90 - 100\lambda > \overbrace{\lambda VaR_{95\%}(L_1) + (1-\lambda) VaR_{95\%}(L_2)}^{=-10}$$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

- il Value-at-Risk non descrive le perdite nella coda destra della distribuzione della perdita (PERDITE ESTREME)
  - ⋆ il VaR_α stabilisce solo il livello della perdita che non viene superato con probabilità (almeno) pari ad $\alpha \Rightarrow$ non dà informazioni sul livello delle perdite se queste superano $\text{VaR}_\alpha(L)$
  - ⋆ due perdite L_1, L_2 possono avere lo stesso Value-at-Risk, $\text{VaR}_\alpha(L_1) = \text{VaR}_\alpha(L_2)$ mentre le perdite in eccesso ($\equiv$ conditional tail expectation) possono essere diverse

$$E[L_1|L_1 \geq \text{VaR}_\alpha(L_1)] \neq E[L_2|L_2 \geq \text{VaR}_\alpha(L_2)]$$

$\Rightarrow$ VaR INFORMAZIONE PARZIALE

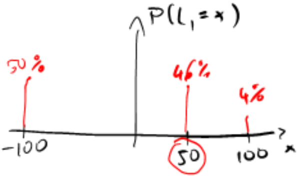
  - ⋆ ESEMPIO:

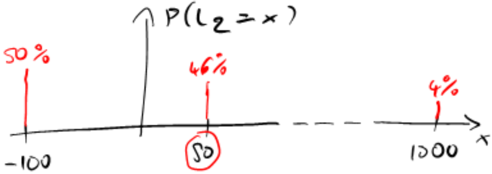
$$L_1 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases}, \qquad L_2 = \begin{cases} -100 & \text{con prob. } 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$\text{VaR}_{95\%}(L_1) = \text{VaR}_{95\%}(L_2) = 50,$$

$$E[L_1|L_1 \geq \text{VaR}_{95\%}(L_1)] = 54, \qquad E[L_2|L_2 \geq \text{VaR}_{95\%}(L_2)] = 126$$

VaR è "BLINDNESS TO THE TAIL"





$$VaR_{95\%}(L_1) = VaR_{95\%}(L_2) = 50$$

MA:

$$(L_1 \mid L_1 \geq 50) = \begin{cases} 50 & \frac{46}{50} \\ 100 & \frac{4}{50} \end{cases} \Rightarrow E(L_1 \mid L_1 \geq 50) = \frac{50 \cdot 46 + 100 \cdot 4}{50} = 54$$

$$\wedge$$

$$(L_2 \mid L_2 \geq 50) = \begin{cases} 50 & \frac{46}{50} \\ 1000 & \frac{4}{50} \end{cases} \Rightarrow E(L_2 \mid L_2 \geq 50) = \frac{50 \cdot 46 + 1000 \cdot 4}{50} = 126$$

ANCHE: $E(L_1 \mid L_1 > 50) = 100 < E(L_2 \mid L_2 > 50) = 1000$

Value-at-Risk e "blindness to the tail"

$E(L) = 100$

- ALTRO ESEMPIO: perdita $L \sim \exp(1/100)$. Confrontare $\mathrm{VaR}_{99\%}(L)$ con $\mathrm{VaR}_{99\%}(M)$, dove

$$M = \min\{L, 500\}$$

M = ritenzione in un trattato riassicurativo stop-loss ⇒ DOVREBBE FAR DIMINUIRE IL CAPITALE ALLOCATO (SENZA CONSIDERARE I PREMI RETROCESSI)

  - INVECE si trova

$$\mathrm{VaR}_{99\%}(M) = \mathrm{VaR}_{99\%}(L) = -100\log(0.01) = 460.5$$

  - VaR invariato rispetto allo spostamento della probabilità nella coda della distribuzione
  - stesso VaR anche se $P[L \geq M] = 1$
  - osserviamo che SE AUMENTIAMO IL LIVELLO DI CONFIDENZA

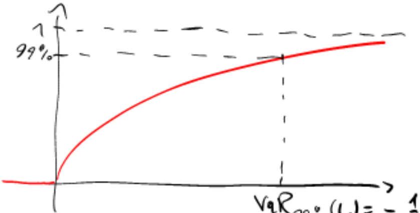
$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(L) = -100\log(0.005) = 529.8$$

mentre

$$\mathrm{VaR}_{99.5\%}(M) = 500$$ = MASSIMA PERDITA

VaR e "Blindness to the tail"

L :



$$VaR_{99\%}(L) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha) = -100\cdot\log(0.01)$$
$$= 460.5$$

$$M = \min(L, 500)$$

$$F_M(x) = P(M \le x) = P(\min(L,500) \le x) =$$

$$= P(\min(L,500) \le x,\ L \le 500) + P(\min(L,500) \le x,\ L > 500)$$

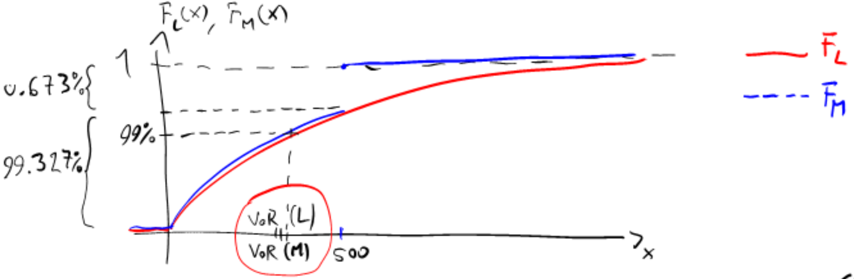
$$= P(L \le x,\ L \le 500) + P(500 \le x,\ L > 500)$$

$$= P(L \le \min(x,500)) + P(L > 500)\mathbb{1}_{x \ge 500}$$

... CONTINUA

$$F_M(x) = F_L(\min(x,500)) + (1 - F_L(500))\, 1_{x \geq 500}$$

$$= \begin{cases} F_L(x) & x < 500 \\ \underbrace{F_L(500) + 1 - F_L(500)}_{=1} & x \geq 500 \end{cases}$$



SALTO DI F_M IN 500 :

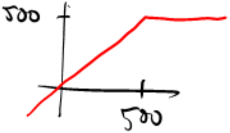
$$P(M=500) = P(L>500) = \underbrace{F_M(500)}_{=F_L(500)} - F_M(500-) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{100}\cdot 500}\right) = 0.00673$$

...CONTINUA

OSS: IL CALCOLO POTEVA ESSERE FATTO PIÙ SEMPLICEMENTE:

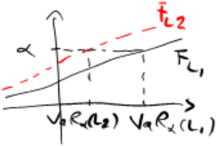
$$
\begin{aligned}
VaR_{95\%}(M) &= VaR_{95\%}(\mathrm{MIN}(L, 500)) \\
&= \mathrm{MIN}(VaR_{95\%}(L), 500) \\
&= VaR_{95\%}(L) \qquad (< 500)
\end{aligned}
$$

$f(x) = \mathrm{MIN}(x, 500)$ È NON DECRESCENTE



Value-at-Risk e dominanza stocastica

- ▷ nell'esempio precedente una delle due perdite domina (è sempre più grande) l'altra
- ▷ una condizione più debole è la dominanza stocastica: L_1 domina stocasticamente L_2 se



$$F_{L_1}(x) \leq F_{L_2}(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

cioè

$$P(L_1 > x) \geq P(L_2 > x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi L_1 comporta perdite superiori ad ogni livello fissato con probabilità più elevata

- ▷ dalla definizione di value-at-risk segue che

$F_{L_1}(x)=\alpha$
$F_{L_2}(x)=\alpha$
L_2 ARRIVA "PRIMA" AL LIVELLO α

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$$

per ogni α: L_1 è più rischiosa di L_2 $\rightsquigarrow$ richiede non meno capitale

ALTRE MISURE DI RISCHIO

- ▷ altri esempi di misure di rischio
  - ⋆ varianza: $\rho(L) = E[L] + \lambda var[L]$, $\lambda > 0$
  - ⋆ deviazione standard: $\rho(L) = E[L] + \lambda\sqrt{var[L]}$, $\lambda > 0$ ⇝ simmetriche → RIFLETTONO PERDITE E GUADAGNI IN UGUAL MODO
  - ⋆ massimo: $\rho(L)$ = estremo superiore di $X = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_L(x) = 1\} = \mathrm{VaR}_1(L)$ ⇝ elimina la rovina, ma troppo oneroso → IL CAPITALE HA UN COSTO! (OPPORTUNITÀ)
  - ⋆ misure di scenario
  - ⋆ $\rho(L) = E[(L - c)_+]$ con c livello di perdita dato e $(x)_+ = \max\{x, 0\}$; ad esempio,

OPPURE $c + E((L-c)_+) = E(\max(L, c))$

$$\rho(L) = E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$$

si osservi che

ANCHE SE $P(L = \mathrm{VaR}_\alpha(L)) > 0$, $L - \mathrm{VaR}_\alpha(L) = 0$ SU QUELL'EVENTO!

$$\begin{aligned}\rho(L) &= E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \\ &= E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L)); L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]\end{aligned}$$

(dove $E[X; A] = E[X 1_A]$ per ogni v.a. integrabile X e evento A) tale misura è collegata all'expected shortfall

SPERANZA CONDIZIONATA A UN EVENTO: $E[X|A] = \dfrac{E[X;A]}{P(A)}$

Expected Shortfall

- Expected shortfall: dato L con $\boxed{E[|L|] < +\infty}$ ed un livello di confidenza $0 < \alpha < 1$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \mathrm{VaR}_\beta(L)\mathrm{d}\beta$$

  - a volte chiamato Tail-Value-at-Risk, $\mathrm{TVaR}_\alpha(L)$
  - media dei capitali che garantiscono una probabilità almeno pari a α di assorbire le perdite
  - per definizione, ES riflette il peso della coda della distribuzione oltre VaR

- terminologia non uniforme: a volte si chiama expected shortfall la quantità $E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]$

TVaR, ES
CVaR, CTE

Expected Shortfall

▷ proprietà dell'Expected shortfall

I ⋆ è sub-additiva (e coerente) => PREMIA LA DIVERSIFICAZIONE

II ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha \geq \mathrm{VaR}_\alpha$, ES_α funzione nondecrescente e continua di α

⋆ limiti:

III
$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mathrm{ES}_\alpha = E[L]$$

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \mathrm{ES}_\alpha = \text{estremo superiore di } L = \inf\{x \in \mathbb{R} |\, F_L(x) = 1\}$$

IV ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha(g(L)) = g(\mathrm{ES}_\alpha(L))$ se g lineare non decrescente

V ⋆ $\mathrm{ES}_\alpha(L_1) \geq \mathrm{ES}_\alpha(L_2)$ se L_1 domina stocasticamente L_2

▷ tuttavia, VaR esiste sempre, ES richiede speranza finita

I) PROVATA IN SEGUITO

II) $ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(L)}_{\geq VaR_\alpha(L)}\, d\beta \geq VaR_\alpha(L)$

$\alpha' > \alpha$ $\quad ES_\alpha$ = MEDIA DEI CAPITALI CON LIVELLO DI CONFIDENZA $\geq \alpha$

$ES_{\alpha'}$ = " " " " " $\geq \alpha'$

$\Rightarrow ES_{\alpha'}(L) \geq ES_\alpha(L)$

$\alpha \longrightarrow \int_\alpha^1 \cdots d\beta$ FUNZIONE INTEGRALE $\Rightarrow$ CONTINUA IN α

$\Rightarrow \alpha \longrightarrow ES_\alpha$ CONTINUA

III) $VaR_1(L) =$ ESTREMO SUPERIORE DI L

$$\geq ES_\alpha(L) \geq VaR_\alpha(L)$$

$$\downarrow$$

$$SUP(L)$$

$$\Rightarrow ES_\alpha(L) \to SUP(L)$$

OSSERVAZIONE: (QUANDO F_L È INVERTIBILE)

$$\boxed{E(L)} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dF_L(y)$$

$$y = F_L^{-1}(t) \Rightarrow t = F_L(y)$$

$$dF_L(y) = dF_L(F_L^{-1}(t)) = dt$$

$$= \int_0^1 F_L^{-1}(t) \, dt$$

$$y \to +\infty \quad t \to 1$$

$$y \to -\infty \quad t \to 0$$

$$= \boxed{ES_0(L)}$$

... CONTINUA

$$\Rightarrow ES_\alpha(L) \geq ES_0(L) = E(L)$$

IV) $ES_\alpha(c_1 + \underset{\geq 0}{c_2} L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(c_1 + c_2 L)}_{= c_1 + c_2\, VaR_\beta(L)} \, d\beta$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$= c_1 + c_2 \cdot ES_\alpha(L)$$

V) L_1 DOMINA STOCASTICAMENTE L_2

$$\Rightarrow ES_\alpha(L_1) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \underbrace{VaR_\beta(L_1)}_{\geq VaR_\beta(L_2)} \, d\beta \geq ES_\alpha(L_2)$$

Expected Shortfall

VI

- l'Expected shortfall può essere rappresentato al modo seguente (facile da ottenere nel caso di F_L invertibile):

"TVaR LOADING"

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mathrm{VaR}_\alpha(L) + \underbrace{\frac{E[(L - \mathrm{VaR}_\alpha(L))_+]}{1-\alpha}}_{\text{EXTRA CAPITALE RICHIESTO OLTRE IL } \mathrm{VaR}_\alpha \text{, SE SI USA } \mathrm{ES}_\alpha}$$

da questa espressione si deduce che

$$\underline{E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] \leq \mathrm{ES}_\alpha(L) \leq E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]}$$

dove $E[X|A] = E[X1_A]/P(A)$; la quantità a destra è chiamata conditional tail expectation

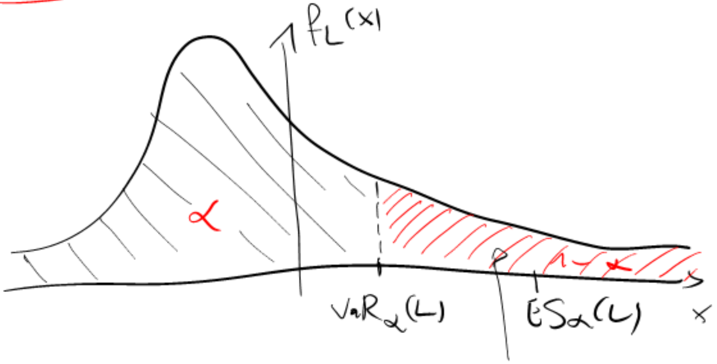
- se la distribuzione di L è continua,

$$\boxed{\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = E[L|L > \mathrm{VaR}_\alpha(L)]}$$

$\Rightarrow$ ES = perdite attese sopra il VaR

"QUANDO CE PERDITE SUPERANO IL VaR

EXPECTED SHORTFALL



$$ES_\alpha(L) = E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L)\right]$$

MEDIA DELLA DISTRIBUZIONE

VI)

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(L)\,d\beta$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(\beta)\,d\beta$$

$F_L^{-1}(\beta) = y$

$\beta = F_L(y)$

$\beta=\alpha \Rightarrow y=F_L^{-1}(\alpha)$

$\beta \uparrow 1 \Rightarrow y \uparrow \sup(L)$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} y\,dF_L(y)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{\sup(L)} \left(y - F_L^{-1}(\alpha) + F_L^{-1}(\alpha)\right)dF_L(y)$$

$$= \frac{F_L^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}\underbrace{\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{+\infty} dF_L(y)}_{=1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_L^{-1}(\alpha)}^{+\infty}\left(y - F_L^{-1}(\alpha)\right)dF_L(y)$$

(CASO INVERTIBILE)

... CONTINUA

$$= F_L^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y - F_L^{-1}(\alpha)\right)_+ dF_L(y)$$

$$= VaR_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E\left[\left(L - VaR_\alpha(L)\right)_+\right]$$

QUINDI;

$$ES_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) + \underbrace{\frac{P(L > VaR_\alpha(L))}{1-\alpha}}_{\leq 1} \frac{E\left[(L - VaR_\alpha(L))_+\right]}{P(L > VaR_\alpha(L))}$$

CONSEGUENZA 1, SLIDE 282

$$\leq VaR_\alpha(L) + E\left[L - VaR_\alpha(L) \mid L > VaR_\alpha(L)\right]$$

... CONTINUA

$$\leq E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L) \right]$$

D'ALTRA PARTE

$$ES_\alpha(L) = VaR_\alpha(L) + \frac{1}{1-\alpha} E\left[\left(L - VaR_\alpha(L) \right)_+ \right]$$

$$= VaR_\alpha(L) + \underbrace{\frac{P(L \geq VaR_\alpha(L))}{1-\alpha}}_{\geq 1} \frac{E\left[\left(L - VaR_\alpha(L) \right)_+ \right]}{P(L \geq VaR_\alpha(L))}$$

IN QUANTO $P(L < VaR_\alpha(L)) = \underbrace{F_L(VaR_\alpha(L)-)}_{\leq \alpha}$

DALLA DEFINIZIONE DI QUANTILE SX $\to$

--- CONTINUA

$$ES_\alpha(L) \geq VaR_\alpha(L) + E\left[L - VaR_\alpha(L) \mid L \geq VaR_\alpha(L)\right]$$

$$= E\left[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)\right]$$

QUANDO F_L CONTINUA

$$\Rightarrow P(L > VaR_\alpha(L)) = P(L \geq VaR_\alpha(L))$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow E\left[L \mid L > VaR_\alpha(L)\right] &= E\left[L \mid L \geq VaR_\alpha(L)\right] \\ &= ES_\alpha(L) \end{aligned}}$$

CALCOLO DI $ES_\alpha(L)$ (CASO CONTINUO)

$$ES_\alpha(L) = E\left[L \,\middle|\, L > VaR_\alpha(L)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \, d\underbrace{F_{L|L>VaR_\alpha(L)}}(y)$$

$$F_{L|L>VaR_\alpha(L)}(y) = P(L \le y \,|\, L > VaR_\alpha(L))$$

$$= \begin{cases} \dfrac{F_L(y) - F_L(VaR_\alpha(L))}{1 - F_L(VaR_\alpha(L))} & y > VaR_\alpha(L) \\ 0 & y \le VaR_\alpha(L) \end{cases}$$

-- **CONTINUA**

F_L continua

$$= \begin{cases} \dfrac{F_L(y)-\alpha}{1-\alpha} & y > VaR_\alpha(L) \\ 0 & y \le VaR_\alpha(L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} y \, dF_L(y)}$$

SE L HA DENSITÀ f_L

$$\Rightarrow \boxed{ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} y \, f_L(y) \, dy}$$

Expected Shortfall

$L - C$ = PERDITA POST ALLOCAZIONE

- se si adotta l'expected shortfall come capitale, $C = \mathrm{ES}_\alpha(L)$, allora (NEL CASO CONTINUO)

$$\underbrace{E[L - C | L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)]}_{= E(L | L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)) - C} = 0$$

$\mathrm{ES}_\alpha(L) = C$

⇝ perdite attese nulle sopra il VaR

- ES con distribuzione esponenziale, $L \sim \exp(\lambda)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(1 - \alpha)) = \tilde{K}_\alpha \cdot E[L]$$

- per una famiglia scala-locazione, $L \sim \mu + \sigma\widetilde{L}$ ($\widetilde{L} \sim F$ e quindi $L \sim F_{\mu,\sigma}$), allora

$= \mathrm{ES}_\alpha(\mu + \sigma \tilde{L}) =$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma\, \mathrm{ES}_\alpha(\widetilde{L})$$

$ES_\alpha(L)$, $L \sim EXP(\lambda)$

$$f_L(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

$$\boxed{ES_\alpha(L)} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR}^{+\infty} y\,\lambda e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= \frac{\lambda}{1-\alpha}\left\{ \underbrace{y\,\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\Bigg|_{VaR}^{+\infty}}_{\frac{VaR\,e^{-\lambda VaR}}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_{VaR}^{+\infty} e^{-\lambda y}\,dy}_{\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\Big|_{VaR}^{+\infty} = \frac{e^{-\lambda VaR}}{\lambda}} \right\}$$

... CONTINUA

$$= \frac{\cancel{\lambda}}{1-\alpha}\left\{\frac{VaR \cdot e^{-\lambda VaR}}{\cancel{\lambda}} + \frac{e^{-\lambda VaR}}{\lambda^{\cancel{2}}}\right\}$$

$$VaR_\alpha(L) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda \cdot VaR_\alpha(L)} = 1-\alpha$$

$$= \frac{1}{\cancel{1-\alpha}}\left\{-\frac{1}{\lambda}\log(1-\alpha)\cdot\cancel{(1-\alpha)} + \frac{\cancel{1-\alpha}}{\lambda}\right\}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \log(1-\alpha)\right)}$$

Expected Shortfall

CASO NORMALE: $VaR_\alpha = \mu + \sigma K_\alpha$, $ES_\alpha = \mu + \sigma K'_\alpha$

- ▷ approccio parametrico: $L \sim N(\mu, \sigma^2)$
  - ⋆ $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$
  - ⋆ caso normale standard: $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \Phi^{-1}(\alpha)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{+\infty} z\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha},$$

dove $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-z^2/2}$ è la densità della normale standard

  - ⋆ nel caso generale, $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sim \mu + \sigma\tilde{L}$ $\quad \tilde{L} \sim N(0,1)$

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = E[L|L \geq \mathrm{VaR}_\alpha(L)] = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

$$ES_\alpha(\mu + \sigma\tilde{L}) = \mu + \sigma ES_\alpha(\tilde{L})$$

DI NUOVO, $ES_\alpha(L) - E(L) = \sigma \cdot \mathrm{CONST}(\alpha)$ } PROPORZIONALE A SD!

ES NEL CASO NORMALE STANDARD

$L \sim N(0,1)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(v)\, dv$$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR}^{+\infty} \underbrace{z\,\phi(z)}_{(-\phi(z))'}\, dz =$$

oss: $\phi'(x) = -x\,\phi(x)$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \Big[-\phi(z)\Big]_{VaR}^{+\infty} = \frac{\phi(VaR_\alpha(L))}{1-\alpha} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}$$

Expected Shortfall

- approccio parametrico: se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$ dove t_ν è t di student con $\nu > 2$ gradi di libertà, densità f_{t_ν} e funzione di ripartizione F_{t_ν}
  - ⋆ un calcolo diretto mostra che ⊗ PROSSIMA SLIDE

$$\mathrm{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{f_{t_\nu}(F_{t_\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \frac{\nu + F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)^2}{\nu - 1}$$

CALCOLA PRIMA PER $L \sim t_\nu$ POI USA LA LINEARITÀ DI ES

- Esempio: confronto tra $\mathrm{ES}_\alpha(L) - E[L]$ con distribuzione normale e t di Student; μ e σ tali che $E[L] = 100$, $SD[L] = 10$

α	90.0%	95.0%	99.0%	99.5%	99.9%
Normale	17.55	20.63	26.65	28.92	33.67
t Student - ν					
10.0	17.79	21.54	30.08	33.84	43.05
4.0	17.67	22.65	36.92	44.72	68.49
2.5	14.94	20.56	40.66	53.97	103.32
2.1	8.71	12.49	27.53	38.42	82.88

PESO DELLA CODA ↓

→ ↑ CON α

↗ ↘ CON ν ↓

ES NEL CASO t - STUDENT

$$f_{t_\nu}(z) = C_\nu \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad C_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

OSS: $$f'_{t_\nu}(z) = -\frac{\nu+1}{\cancel{2}} C_\nu \left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}-1} \cancel{2}\frac{z}{\nu}$$

$$= -(\nu+1)\frac{z}{\nu}\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-1} f_{t_\nu}(z)$$

$$= -\frac{(\nu+1)z}{\nu+z^2} f_{t_\nu}(z)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\nu}{\nu-1}\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right) f_{t_\nu}(z)\right)' = z\, f_{t_\nu}(z)$$

... CONTINUA

CHECK : $\left(-\frac{\nu}{\nu-1}\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)f_{t_\nu}(z)\right)' = -\frac{\nu}{\nu-1}\left\{\frac{2z}{\nu}f(z) - \left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)\frac{(\nu+1)z}{\nu+z^2}f(z)\right\}$

$$= -\frac{\cancel{\nu}}{\nu-1}\left\{2\frac{z}{\cancel{\nu}} - \frac{\cancel{\nu+z^2}}{\cancel{\nu}}\frac{(\nu+1)z}{\cancel{\nu+z^2}}\right\}f(z)$$

$$= z\,f(z)$$

$$\tilde{L} \sim t_\nu \implies \boxed{ES_\alpha(\tilde{L})} = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(\tilde{L})}^{+\infty} z\,f_{t_\nu}(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\frac{\cancel{\nu}}{\nu-1}\frac{\nu+z^2}{\cancel{\nu}}f_{t_\nu}(z)\right]_{F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)}^{+\infty} = \boxed{\frac{\nu+F_{t_\nu}^{-1}(\alpha)^2}{\nu-1}\,\frac{f_{t_\nu}(F_{t_\nu}^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}}$$

VALUE-AT-RISK E EXPECTED SHORTFALL

- la differenza tra distribuzione normale (coda leggera) e t di student (coda pesante) può essere apprezzata al modo seguente
- se $L \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = 1$$

LA NORMALE HA CODA "LEGGERA" QUINDI NON DISTINGUE VaR E ES

$\rightsquigarrow$ ES_α e VaR_α coincidono quando il livello di confidenza aumenta (usare de L'Hopital, $\phi'(z) = -z\phi(z)$)

- se $L \sim \mu + \sigma t_\nu$, con $\nu > 1$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(L)}{\mathrm{VaR}_\alpha(L)} = \frac{\nu}{\nu - 1}$$

$\rightsquigarrow$ la differenza tra ES_α e VaR_α riflette la pesantezza della coda

TVaR LOADING $= ES - VaR = VaR\left(\frac{ES}{VaR} - 1\right) \approx VaR \frac{1}{\nu - 1}$ PER $\alpha \to 1$

VaR - ES CONFRONTO

$L \sim N(0,1)$

$$\frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \frac{\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}}{\Phi^{-1}(\alpha)} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{(1-\alpha)\,\Phi^{-1}(\alpha)}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha) = z \Rightarrow \alpha = \Phi(z)$$

$$\alpha \to 1 \Rightarrow z \to +\infty$$

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{\phi(z)}{z(1-\Phi(z))} \qquad \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{z \to \infty} \frac{-z\,\phi(z)}{1 - \Phi(z) - z\,\phi(z)}$$

$$= \lim_{z \to \infty} \left[1 - \underbrace{\frac{1 - \Phi(z)}{z\,\phi(z)}}_{\to 0} \right]^{-1} = 1$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1 - \overset{0}{\Phi(z)}}{z\,\underset{0}{\phi(z)}} \overset{\text{HOPITAL}}{=} \frac{-\phi(z)}{\phi(z) - z^2\,\phi(z)} = \frac{-1}{1 - z^2} \to 0$$

$$\frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} =$$

$L \sim t_\nu \quad (\mu = 0, \sigma = 1)$

$f_{t_\nu} \equiv f$

$F_{t_\nu} \equiv F$

$$= \frac{\dfrac{f(F^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \; \dfrac{\nu + F^{-1}(\alpha)^2}{\nu - 1}}{F^{-1}(\alpha)}$$

$z = F^{-1}(\alpha)$

$\alpha = F(z)$

$\alpha \to 1 \Rightarrow z \to +\infty$

$$= \frac{f(z)\,(\nu + z^2)}{(\nu-1)(1-F(z))\,z} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$f(z) z^2 \sim z^{1-\nu} \to 0$

... CONTINUA

$$f'(z) = -\frac{(\nu+1)z}{\nu+z^2} f(z) \qquad \text{(VISTA PRIMA)}$$

HÔPITAL:

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{f'(z)(\nu+z^2) + 2z f(z)}{(\nu-1)\left[1 - F(z) - z f(z)\right]}$$

$$= \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1-F(z)}{z f(z)}} \to \frac{\nu}{\nu-1}$$

$$\frac{1-F(z)}{z f(z)} \overset{\text{HÔPITAL}}{=} \frac{-f(z)}{f(z) - \frac{(\nu+1)z^2}{\nu+z^2} f(z)} = \frac{1}{\frac{(\nu+1)z^2}{\nu+z^2} - 1} \to \frac{1}{\nu}$$

$L \sim \exp(\lambda)$

$$\frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \frac{\cancel{\frac{1}{\lambda}}\left(1 - \log(1-\alpha)\right)}{-\cancel{\frac{1}{\lambda}}\log(1-\alpha)} =$$

$$= \frac{1+z}{z} \longrightarrow 1$$

$z = -\log(1-\alpha)$

$z \to +\infty$
QUANDO $\alpha \to 1$

OSS:

$$ES_\alpha(L) - VaR_\alpha(L) = E\left[L - VaR_\alpha(L) \,|\, L > VaR_\alpha(L)\right]$$

$$= E[L]$$ PERCHÈ?

ES PER DISTRIBUZIONE DI PARETO

$$VaR_\alpha(L) = \lambda\left[(1-\alpha)^{-1/\beta} - 1\right]$$

$$L \sim \text{PARETO}(\beta, \lambda)$$

$$F_L(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^\beta \Rightarrow f_L(x) = \frac{\lambda^\beta}{(\lambda + x)^{\beta+1}}$$

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{VaR_\alpha(L)}^{+\infty} x\, f_L(x)\, dx$$

$$\int_z^{+\infty} x\, f_L(x)\, dx = \lambda^\beta \int_z^{+\infty} \frac{x + \lambda - \lambda}{(\lambda + x)^{\beta+1}}\, dx =$$

... CONTINUA

$$= \lambda^\beta \left\{ \int_z^{+\infty} \frac{1}{(\lambda+x)^\beta} dx - \lambda \int_z^{+\infty} \frac{1}{(\lambda+x)^{\beta+1}} dx \right\} = \qquad \beta > 1 !$$

$$= \lambda^\beta \left\{ \int_{z+\lambda}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du - \lambda \int_{z+\lambda}^{+\infty} \frac{1}{u^{\beta+1}} du \right\}$$

$$= \frac{1}{(\beta-1)(\lambda+z)^{\beta-1}} - \frac{\lambda}{\beta(\lambda+z)^\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{ES_\alpha(L)} = \frac{\beta\lambda^\beta}{1-\alpha} \left[\frac{1}{(\beta-1)(\lambda+VaR)^{\beta-1}} - \frac{\lambda}{\beta(\lambda+VaR)^\beta} \right]$$

$$= \cdots = \boxed{\lambda \left[\frac{\beta}{\beta-1} (1-\alpha)^{-1/\beta} - 1 \right]}$$

$$\frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \frac{\cancel{\lambda}\left[\frac{\beta}{\beta-1}(1-\alpha)^{-1/\beta}-1\right]}{\cancel{\lambda}\left[(1-\alpha)^{-1/\beta}-1\right]}$$

$$= \frac{\frac{\beta}{\beta-1}z-1}{z-1} \qquad z=(1-\alpha)^{-1/\beta}$$

$$\alpha \to 1 \Rightarrow z \to +\infty$$

$$= \frac{\frac{\beta}{\beta-1}-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \xrightarrow{\alpha\to 1} \underline{\underline{\frac{\beta}{\beta-1}}} > 1$$

ES e VaR CONFRONTO

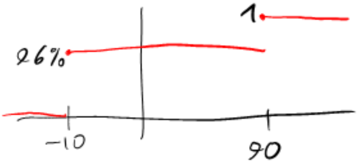
L	$\lim_{\alpha \to 1} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)}$	CODA
$N(\mu, \sigma^2)$	1	LEGGERA
$EXP(\lambda)$	1	//
t_ν	$\nu/(\nu-1)$	PESANTE
$PARETO(\beta, \lambda)$	$\beta/(\beta-1)$	//

Expected Shortfall

- verificare che $\text{ES}_{95\%}(L_1 + L_2) < \text{ES}_{95\%}(L_1) + \text{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 297
- l'expected shortfall riflette l'intera coda della distribuzione
  - calcolare $\text{ES}_{95\%}(L_1)$ e $\text{ES}_{95\%}(L_2)$ per l'esempio di p. 298
  - calcolare $\text{ES}_{99\%}(L)$ e $\text{ES}_{99\%}(M)$ per l'esempio di p. 299
- problema dell'expected shortfall: a differenza del VaR, richiede più informazione sulla forma della coda $\rightsquigarrow$ difficile da ottenere $\rightsquigarrow$ maggiore rischio di modello

ESEMPIO CON DEFAULTABLE BONDS

L_1, L_2



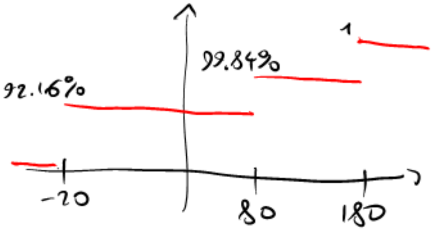
$$VaR_\beta(L) = \begin{cases} -10 & 95\% \le \beta \le 96\% \\ 90 & \beta > 96\% \end{cases}$$

$$ES_{95\%}(L_1) = \frac{1}{1-0.95} \int_{0.95}^{1} VaR_p(L_1)\, dp =$$

$$= \frac{1}{0.05}\left(-10 \cdot 0.01 + 90 \cdot 0.04\right) = 70$$

... CONTINUA

$L_1 + L_2$



$$VaR_\beta(L_1+L_2) = \begin{cases} 80 & 95\% \le \beta \le 99.84\% \\ 180 & \beta > 99.84\% \end{cases}$$

$$ES_{95\%}(L_1+L_2) = \frac{1}{0.05}\left(80 \cdot 0.0484 + 180 \cdot 0.0016\right)$$

$$= 92.88 < \underbrace{ES_{95\%}(L_1) + ES_{95\%}(L_2)}_{140}$$

ESEMPIO p. 298

$$L_1 = \begin{cases} -100 & 50\% \\ 50 & 46\% \\ 100 & 4\% \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} -100 & 50\% \\ 50 & 46\% \\ 1000 & 4\% \end{cases}$$

$$VaR_\beta(L_1) = \begin{cases} 50 & 95\% \le \beta \le 96\% \\ 100 & \beta > 96\% \end{cases}$$

$$ES_{95\%}(L_1) = \frac{1}{0{,}05}\left(50 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}04\right) = 90$$

$$VaR_\beta(L_2) = \begin{cases} 50 & 95\% \le \beta \le 96\% \\ 1000 & \beta > 96\% \end{cases}$$

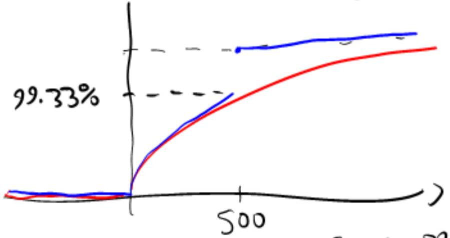
$$ES_{95\%}(L_2) = \frac{1}{0{,}05}\left(50 \cdot 0{,}01 + 1000 \cdot 0{,}04\right) = 810$$

ESEMPIO RIASSICURAZIONE

$L \sim \exp\left(\frac{1}{100}\right) \qquad M = \min(L, 500)$

$$ES_{99\%}(L) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \log(1-\alpha)\right]$$

$$= 100\left[1 - \log(0.01)\right] = 560.517$$



$$F_M(x) = \begin{cases} F_L(x) & x < 500 \\ 1 & x \geq 500 \end{cases}$$

$$VaR_\beta(M) = \begin{cases} VaR_\beta(L) & 99\% \leq \beta < 99.33\% \\ 500 & \beta > 99.33\% \end{cases}$$

... CONTINUA

$$ES_{99\%}(M) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{99\%}^{1} VaR_\beta(M)\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{0.01}\Bigg(\underbrace{\int_{99\%}^{99.33\%} 100\left(1 - \log(1-\beta)\right) d\beta}_{\simeq 1.5814} + \underbrace{500(1-0.9933)}_{3.35} \Bigg)$$

$$= 493.139 < 560.517$$

$\Rightarrow$ ES CATTURA LA VARIAZIONE NELLA CODA