PRINCIPI VARIAZIONALI

Finora le leggi del moto erano state date in FORMA DIFFERENZIALE, cioè con l'eq. di Newton

$$m\frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = \bar{F}_i\left(\bar{r}_i, \frac{d\bar{r}_i}{dt}, t\right)$$

o come eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) = 0$$

vale punto per punto (LOCALE)

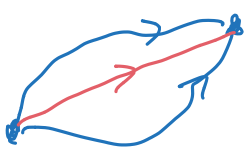
EQ. DIFFERENZ.

Le traiettorie compiute dal moto sono descritte da delle funzioni nel tempo ($\bar{q}(t)$) che soddisfano una data eq. differenziale.

Ora descriviamo il moto effettivamente seguito dal sistema (soggetto a determinate forze) usando proprietà GLOBALI delle funzioni $\bar{q}(t)$.

(INTEGRALI)

Esempio di traiettoria caratterizzata da proprietà globale:
Dati due punti fissati nello spazio $\mathbb{R}^3$, dire qual è la traiettoria che li congiunge che abbia LUNGHEZZA MINIMA



FUNZIONI : - data una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

i pti stazionari di f sono quelli che risolvono $f'(x)=0$.

- data una funzione $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n)$

i pti stazionari di F sono quelli che risolvono $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Ora consideremo il caso in cui F non agisce su uno spazio finito-dimensionale ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$), ma su uno spazio (infinito-dim.) di funzioni $\rightsquigarrow$ FUNZIONALE

Def. Dato uno spazio $\mathcal{U}$ di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio $\mathcal{U}$ una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ associa un numero (reale)

$$F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

ES.) $\mathcal{U} = \{$ funzioni definite su un intervallo $[0,1]\}$ $\quad u \in \mathcal{U}$

1) $F[u] = \int_0^1 u(t)\,dt$ $\quad u = \operatorname{sen}(\pi t)$

$$F[\operatorname{sen}(\pi t)] = \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi}$$

2) $F[u] = u(t_0)$ per un t_0 fissato $\in [0,1]$

Prendiamo $t_0 = 1/2$ $\quad F[\operatorname{sen}(\pi t)] = \operatorname{sen}\pi t_0 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

3) $F[u] = u'(t_0)$ per t_0 fissato $\quad F[\operatorname{sen}(\pi t)] = \pi\cos\pi t_0 = \pi\cos\frac{\pi}{2} = 0$

4) $F[u] = \sqrt{\int_0^1 u^2(t)\,dt}$ $\qquad F[\sin \pi t] = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi t\, dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\xi\, d\xi} =$

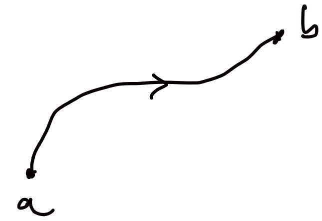
$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(1-\cancel{\cos 2\xi})}{2}\,d\xi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ES 1, 2, 3 SONO FUNZIONALI LINEARI

$$F[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1F[u_1] + c_2F[u_2] \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{U}$$

Funzionale di notevole interesse è quello che data una curva γ, restituisce la lunghezza di γ

$\gamma \mapsto F[\gamma] =$ lungh di γ

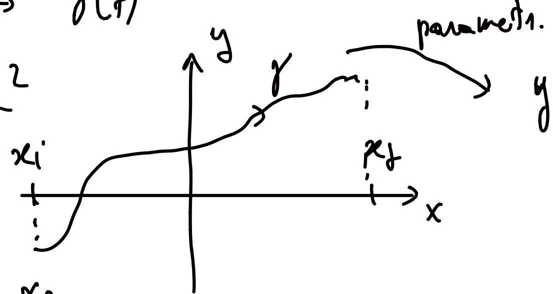


In che senso una curva "è una funz."?

↳ La curva può essere parametrizzata da una funzione

$\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$
$\quad t \mapsto \gamma(t)$ $\qquad$ e t.c. $\gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b$

Caso semplice in $\mathbb{R}^2$



$y = u(x)$

Lunghezza:

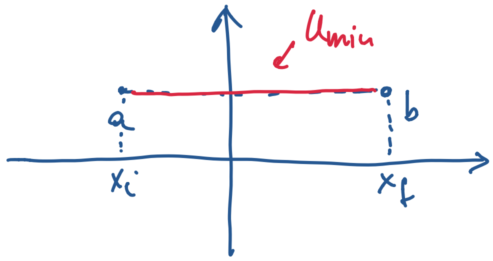
$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

GEODETICHE (curve di lunghezza stazionarie)

Problema classico: trovare le linee più brevi fra due pti sulle superfici.

Dato il piano $\mathbb{R}^2$, chiediamo quali sono le funz. u (curve) che MINIMIZZANO il funzionale LUNGHEZZA

Ci restringiamo al caso in cui a e b abbiano la stessa ordinata



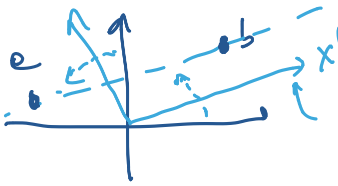
$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} \sqrt{1+u'(x)^2}\, dx$$

def. positivo

→ minimizzato quando $u'(x)=0 \ \forall x$

La funzione che minimizza F (con $y_a = y_b$) è quella con $u'(x) \equiv 0$, cioè la RETTA

Se $y_a \neq y_b$, la soluzione non è più u t.c. $u'(x)=0 \ \forall x$



in queste coordinate $u(x')$ è t.c. $u'(x')=0 \ \forall x'$

Un altro problema importante (meccanica, ottica) è il calcolo del tempo di percorrenza di una traiettoria γ assegnata, per cui la velocità dipende in maniera nota dalla posizione.

Moto piano, traiettorie parametrizzabili da $y = u(x)$

$v = v(x,y)$

TEMPO DI PERCORRENZA:

$$T[u] = \int_\gamma \frac{ds}{v} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{v(x,u(x))}\, dx$$

- In ottica $v = \dfrac{c}{n(x,y)}$ ← indice di rifrazione nel mezzo

$$T[u] = \frac{1}{c}\int_{x_i}^{x_f} n(x,u(x))\sqrt{1+u'(x)^2}\, dx$$

⇝ PRINCIPIO DI FERMAT: tra tutte le traiettorie possibili, quelle che si realizzano in natura minimizzano il funzionale $T[u]$

- In meccanica, sist. conserv. $\Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2}{m}(E - V(x,y))}$

In particolare se la è forza è gravitazionale (e è ell. zero opportunamente scelto)

$v = \sqrt{2gy}$ $\qquad T[u] = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_{x_i}^{x_f} \sqrt{\frac{1+u'(x)}{u(x)}}$

- Noi considereremo funzionali che dip. esplicitam. da u e u', ma in generale F può dip. da un numero arbitrario di derivate.

una sola derivata

- Esistono funz. che dip. da più funzioni

$$F : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$

$$(u,v) \mapsto F[u,v] = \int_0^1 u(x) \cdot v(x)\, dx$$

(in partic. è un funz. BILINEARE)

Es è lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata da

$$\gamma : t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$$

$$F[\gamma] = F[u,v,w] = \int_0^1 \sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 + w'(t)^2}\, dt$$

VARIAZIONE DI UN FUNZIONALE

Consideriamo esempio

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U \mapsto F(\bar{x})$$

Fissiamo una n-pla $\delta\bar{x} = (\delta x_1, \dots, \delta x_n) \in \mathbb{R}^n$

e consideriamo i valori di F nei pti VARIATI $\bar{x} + \alpha\delta\bar{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

La DERIVATA DIREZIONALE (o variazione) δF della funz. F nel pto $\bar{x}$ e relativa al vettore $\delta\bar{x}$ è def. da

$$\delta F(\bar{x}, \delta\bar{x}) = \frac{d}{d\alpha} F(\bar{x} + \alpha\delta\bar{x}) \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x})\, \delta x_i \quad = dF[\delta\bar{x}]$$

$$= \bar{\nabla} F \cdot \delta\bar{x}$$

ci dice quanto velocemente varia la funz. F lungo la direz. $\delta\bar{x}$.

F è stazionario in $\bar{x}$ $\iff$ δF si annulla in $\bar{x}$, $\forall \delta\bar{x}$

$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0 \quad \forall i \right)$

Consideriamo funzionale $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ [Spazio di funzione è uno SP. VETTORIALE a infinite dimensioni]

- fissiamo una variazione $\delta u(t)$
- consideriamo la famiglia ad un parametro di funzioni variate

$$u^\alpha(t) = u(t) + \alpha\, \delta u(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Def. la VARIAZIONE δF del funzionale F in u, relativa alla variazione δu si definisce considerando

$$F[u^\alpha] = F[u + \alpha \delta u]$$

che per u e δu fissati è una FUNZIONE di α $\alpha \mapsto F[u^\alpha] \in \mathbb{R}$.

e ponendo

$$\boxed{\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \Big|_{\alpha = 0}} \qquad (*)$$

È un funzionale nelle due funzioni u e δu

- Il funzionale si dice DIFFERENZIABILE in u se la derivata $(*)$ esiste $\forall \delta u$.

- Procedendo in maniera più intuitiva, si può pensare δu come "piccolo" e definire δF come la parte lineare in δu dell' INCREMENTO

$$\Delta F = F[u + \delta u] - F[u].$$

Il risultato è lo stesso di $(*)$.

ES.)

1) $F[u] = \int_0^1 u(x)\,dx$

- $F[u^\alpha] = \int_0^1 (u(x) + \alpha\,\delta u(x))\,dx$

$$\delta F[u,\delta u] = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 (u(x) + \alpha\,\delta u(x))\,dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_0^1 \delta u(x)\,dx$$

- $\Delta F = F[u+\delta u] - F[u] = \int_0^1 (u+\delta u)\,dx - \int_0^1 u\,dx = \underbrace{\int_0^1 \delta u(x)\,dx}_{\text{lin.}} = \delta F[u,\delta u]$

2) $F[u] = \int_0^1 u(x)^2\,dx$

- $\delta F[u,\delta u] = \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 (u(x) + \alpha\,\delta u(x))^2\,dx \Big|_{\alpha=0} =$

$$= \frac{d}{d\alpha} \int_0^1 u^2\,dx \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{d\alpha}\, 2\alpha \int_0^1 u\,\delta u\,dx \Big|_{\alpha=0} + \frac{d}{d\alpha}\, \alpha^2 \int_0^1 u^2\,dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$= 0 + 2\int_0^1 u\,\delta u\,dx + 0$$

- $\Delta F = F[u+\delta u] - F[u] = \int_0^1 (\cancel{u^2} + 2u\,\delta u + \delta u^2)\,dx - \int_0^1 \cancel{u^2}\,dx$

$$= \underbrace{2\int_0^1 u\,\delta u\,dx}_{\text{parte lineare in } \delta u} + \int_0^1 \delta u^2\,dx$$

$= \delta F[u,\delta u]$

3) $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\,dx$

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(u, u', x) \mapsto L(u, u', x)$

$u \mapsto u + \alpha\,\delta u = u^\alpha$

$u' \mapsto u' + \alpha\,\delta u' = u'^\alpha$

$$\delta F[u,\delta u] = \frac{d}{d\alpha} \int_{x_i}^{x_f} L(u+\alpha\,\delta u, u'+\alpha\,\delta u', x)\,dx \Big|_{\alpha=0}$$

$$\overset{!}{=} \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{\partial L(u,u',x)}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial L(u,u',x)}{\partial u'}\,\delta u' \right\} dx$$

variabile da cui L dipende

funz. $u(x)$, $u'(x)$

integr. per parti →

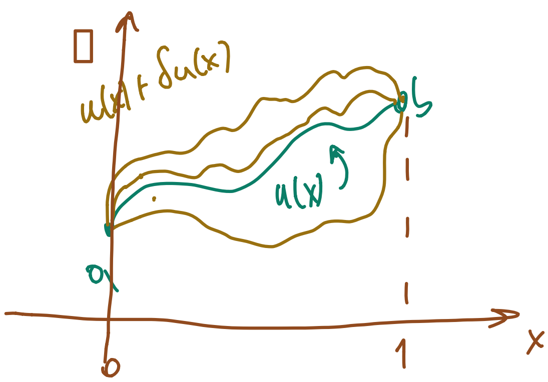
$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$

$$= \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} \right) \delta u + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \right) \right\} dx =$$

$$\delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

In particolare, se ci si restringe a VARIAZIONI $\delta u(x)$ NULLE AGLI ESTREMI, si trova

$$\delta F[u, \delta u] = - \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \delta u(x) \, dx$$



$u+\delta u$ passa sempre per a e b

Detto altrimenti stiamo restringendo il dominio $\mathcal{U}$ a tutte e sole le traiettorie che passano per a e b

Su $\mathbb{R}^2$ γ espressa da $y = u(x)$

se restringo

$$\mathcal{U} = \{ \text{funzioni } u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ t.c. } u(0) = y_a \text{ e } u(1) = y_b \}$$

allora affinché anche $u + \delta u \in \mathcal{U}$ bisogna che $\delta u(0) = 0$ e $\delta u(1) = 0$ (variaz. nulle agli estremi)

ES. $L(u,u',x) = \sqrt{1+(u')^2}$ $\qquad F = \int_0^1 L(u(x), u'(x), x)\, dx$

$$\delta F[u,\delta u] = -\int_0^1 \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)\delta u \, dx = -\int_0^1 \frac{u''\,\delta u}{(1+u'^2)^{3/2}}\, dx$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u''}{\sqrt{1+u'^2}} - u' \cdot \frac{\cancel{2}u' \cdot u''}{\cancel{2}(1+u'^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \qquad = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}\left(1+u'^2 - u'^2\right) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$