

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 7 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

Trasformazione di inerzia

$$I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} m_p (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \wedge [\underline{y} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0)]$$

$I_0 \rightarrow$ matrice simmetrica (3×3)

momento di
inerzia rispetto a $\underline{z}$

$$I_z = \underline{u} \cdot I_0 \cdot \underline{u}$$

(') ()

$$\underline{u} = \text{vers}(\underline{z})$$

$\rightarrow$ proprietà geometriche $\Leftrightarrow f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0 \cdot \underline{x}$
 $\approx$ costante

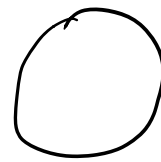
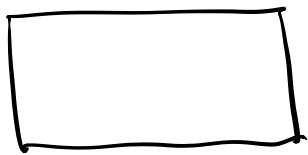
ellissoide di inerzia 3d

ellisse di inerzia 2d

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

$$I_0 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

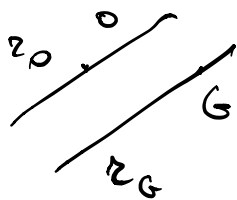
→ Asse principali di inerzia
(autovalori di I_0)



Variazione del polo O di I_0

$$I_0(\underline{u}) = I_G(\underline{u}) + M (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O)]$$

Teorema di Huygens-Steiner

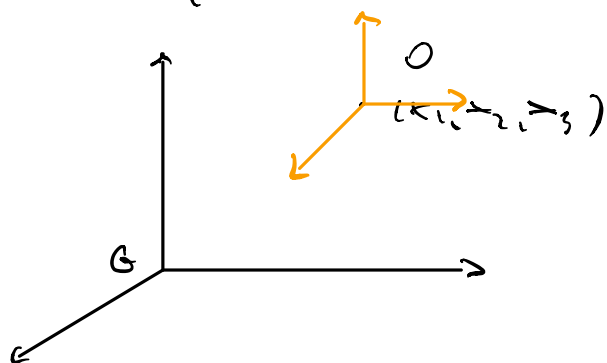


$$I_{r_O} = I_{r_G} + M \|\underline{u} \times (\underline{x}_G - \underline{x}_O)\|^2$$

$\equiv M \cdot (\text{distanza})^2$

Proprietà degli assi principali di inerzia
relativi al centro di massa.

A.P.I. (G) $\leadsto$ assi principali centrali



Con le formule di
trasporto possiamo
determinare la matrice
di inerzia in O , in una
base con origine in O e

essi paralleli agli assi centrali

$$I_G = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \Rightarrow I_O = \begin{pmatrix} J_1 + M(x_2^2 + x_3^2) & -Mx_1x_2 & -Mx_1x_3 \\ -Mx_1x_2 & J_2 + M(x_1^2 + x_3^2) & -Mx_2x_3 \\ -Mx_1x_3 & -Mx_2x_3 & J_3 + M(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

Commenti:

- 1) Se O è Asse principale centrale $\Rightarrow$ la Terza principale per O è parallela a quella centrale (infatti, due coordinate x_i e x_j sono nulle $\rightarrow$ la matrice è ancora diagonale)
- 2) Se O è piano principale centrale $\Rightarrow$ è anch'essa per O ortogonale a questo piano è principale, e gli altri due sono uguali rispetto a quelli centrali
(O ha una sola coordinata nulla $\rightarrow$ solo 2 momenti debbano essere zero $\Rightarrow$)
- 3) Se O non appartiene ai piani principali $\Rightarrow$ la Terza principale per O è diversa da quella per G

u) dalla formula di Frobenius

$$T_0(u) = T_G(u) + M(\underline{x}_G - \underline{x}_0) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_0)]$$

identif. $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$

$$= \underline{T}_G(\underline{u}) + M \|\underline{x}_G - \underline{x}_0\|^2 \underline{u} - \boxed{M(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)) \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)}$$

Se $\underline{u}$ è autovettore per T_0 ($T_0(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$)

questo implica che $\underline{u}$ è autovettore
anche per T_0 ($T_0(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$) solamente
se

$$(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)) (\underline{x}_G - \underline{x}_0) \text{ è zero o}$$

parallelo ad $\underline{u}$ $\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \quad \underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0) = 0 \\ \sigma \quad (\underline{x}_G - \underline{x}_0) \text{ è} \\ \text{parallelo a } \underline{u} \end{array} \right.$$

$O \in$ piano per G
ortogonale a $\underline{u}$
 $\Rightarrow$ piano principale
centrale ortogonale
a $\underline{u}$

$O \in$ retta per G
di direzione $\underline{u}$
 $=$ ass. principale
centrale di direzione
 $\underline{u}$

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 7 APRILE 2020

- SECONDA PARTE

EQUAZIONI DELLA DINAMICA

Problema dello statica

Sistemi dinamici

→ Principio dei lavori virtuali

→ Equazioni Cardinali dello Statica

Quale è la config di equilibrio?

Stabilità? Reazioni vincolari all'eq.?

→ strutture interne dei rigidi

Sforzi interni & Geometria delle masse
(matrice di inerzia)

$$\underline{F} = \underline{0} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\bar{F}} = m \underline{a} = m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2}$$

$\underline{x} = \underline{x}(t)$

PLV
(conservative
non-conservative)

Equazioni di
Lagrange
(conservative
non-conservative)

Equazioni Cardinali
della Statica

Equazioni Cardinali
della Dinamica.

Sistemi dinamici generali ed equazioni di
Lagrange

Principio di D'Alembert : ogni
problema di dinamica si può considerare
come un problema di statica aggiungendo
alle forze agenti su ogni punto B
le "forze di inerzia" $-\frac{d}{dt} \underline{P}_B$
($\underline{P}_B$ quantità di moto)

Di fatto

$$\underline{F}_B = \frac{d}{dt} \underline{P}_B \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_B - \frac{d}{dt} \underline{P}_B = 0$$

→ punto di vista dell'osservatore solidale

il sistema è in equilibrio se teniamo conto anche delle forze di inerzia.

Consideriamo un sistema autonomo ad l gradi di libertà

$$\underline{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_l(t))$$

Dal principio dei lavori virtuali + il principio di D'Alembert

$$\sum_{B \in S} \left(\underline{F}_B - \frac{d}{dt} \underline{p}_B \right) \cdot \delta \underline{x}_B = 0$$

$\forall \delta \underline{x}_B$ virtuale (invertibile)

Ricordiamo

$$\delta \underline{x}_B = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\sum_{i=1}^l \underbrace{\left(\sum_{B \in S} \underline{F}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right)}_{Q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^l \underbrace{\left(\sum_{B \in S} \frac{d}{dt} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right)}_{(\dot{P})_i} \delta q_i$$

Q_i : forze generalizzate

$(\dot{P})_i$: derivate delle quantità di moto generalizzate.

$$(\dot{P})_i = Q_i$$

Lemma $(\dot{P})_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i}$

where $K = \text{energy cinétique}$

Démonstration

$$1) (\dot{P})_i = \sum_{B \in S} \frac{d}{dt} \underline{p}_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} =$$

$$= \sum_{B \in S} \left[\frac{d}{dt} \left(\underline{p}_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) - \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) \right]$$

$$\left| \frac{d}{dt} (f \cdot g) = \frac{d}{dt} f \cdot g + f \cdot \frac{d}{dt} g \right.$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{B \in S} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right) - \sum_{B \in S} \underline{p}_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \right)$$

$$2) K = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \| \underline{v}_B \|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B = \frac{d}{dt} \underline{x}_B(q(t), t) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t}$$

↑
dérivée fonction composite

$$\left. \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_B \underline{p}_B = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_B \underline{x}_B \right\}$$

$$\sum_{B \in S} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{B \in S} \underbrace{\underline{p}_B}_{m_B \underline{v}_B} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B =$$

$$= \sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B\|^2 \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K$$

$$\rightarrow \left[\sum_{B \in S} \underline{p}_B \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K \right]$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 7 APRILE 2020

— TERZA PARTE

lemma: $(\dot{p})_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i}$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B\|^2$$

$$(\dot{P})_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{B \neq i} p_B \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{B \neq i} p_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Abbiamo ottenuto

$$\mathcal{L}_B = \sum_{j=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}_B = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}_B$$

$$\text{Segue: } \sum_{B \neq i} p_B \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} K$$

Adesso: guardiamo il secondo termine

$$\sum_{B \neq i} p_B \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$\text{Abbiamo } \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}_B$$

In fatti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \mathcal{L}_B \right) = \sum_{j=1}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_j +$$

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} x_B \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} x_B}_{\underline{v}_B} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} x_B \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B$$

Allora

$$\sum_{B \in S} \underbrace{p_B}_{m_B \underline{v}_B} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_B}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underline{v}_B$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \underbrace{\| \underline{v}_B \|^2}_{\underline{v}_B \cdot \underline{v}_B} \right) = \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i}$$

c.v.d.

$$(\dot{P})_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial k}{\partial q_i}$$

mettiamo questo insieme a

$$(\dot{P})_i = Q_i$$

Troviamo le equazioni di Lagrange con
conservative

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i \right|$$

Caso conservativo : $Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$

Introduciamo la funzione Lagrangiana

$$L = K - V$$

Allora le equazioni di Lagrange diventano

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$$

$\forall i = 1, \dots, n$

In fatti: $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (K - V) - \frac{\partial}{\partial q_i} (K - V) =$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (-V) \right)}_{\substack{\text{per forze} \\ \text{posizionali} \\ \text{non dipende} \\ \text{da } \dot{q}_i}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial k}{\partial q_i} = Q_i$$

Equazioni Cardinali della Dinamica

FCS + il principio di D'Alembert

$$\underline{R}^e - \sum_{B \in S} \dot{\underline{p}}_B = \underline{0}$$

Definiamo $\underline{P} = \sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B = M \underline{v}_G$
 ↑ del di centro di massa

$$\Rightarrow \underline{R}^e = \frac{d}{dt} \underline{P} = \frac{d}{dt} (M \underline{v}_G)$$

Allo stesso modo per i momenti:

$$\underline{M}^e(0) - \sum_{B \in S} (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \dot{\underline{p}}_B = \underline{0}$$

momenti forze opposti $-\frac{d}{dt} \underline{p}_B$

$$\hookrightarrow \underline{M}^e(0) = \sum_{B \in S} (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \frac{d}{dt} \underline{p}_B =$$

$$= \sum_{B \in S} \left\{ \frac{d}{dt} [(\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \underline{p}_B] - \left(\frac{d}{dt} (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \right) \wedge \underline{p}_B \right\}$$

$$\left(\frac{d}{dt} (f g) = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt} \right)$$

Introduciamo

$$\underline{L}(0) = \sum_{B \in S} (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge \underline{p}_B$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L}(0) = \sum_{B \in S} (\underline{v}_B - \underline{v}_0) \wedge m_B \underline{v}_B$$

$$= \frac{d}{dt} \underline{L}(0) + \underline{v}_0 \wedge \sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B$$

$$(\underline{v}_B \wedge \underline{v}_B = \underline{0})$$

$$= \frac{d}{dt} \underline{L}(0) + \underline{v}_0 \wedge \underline{P}$$

Ricapitoliamo: se definiamo

$$\bullet \quad \underline{P} = \sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B = M \underline{v}_G \quad \text{quantità di moto del sistema}$$

$$\bullet \quad \underline{L}(0) = \sum_{B \in S} (\underline{x}_B - \underline{x}_0) \wedge m_B \underline{v}_B \quad \text{momento angolare del sistema}$$

otteniamo le equazioni cardinali della dinamica

$$\underline{K}^e = \frac{d}{dt} \underline{P}$$

$$\underline{M}^e(0) = \frac{d}{dt} \underline{L}(0) + \underline{v}_0 \wedge \underline{P}$$

Notiamo che se $0 = G$

$$\underline{v}_0 \wedge \underline{M} \underline{v}_G \rightarrow \underline{v}_G \wedge \underline{M} \underline{v}_G = 0$$

$$\underline{M}^e(G) = \frac{d}{dt} \underline{L}(G)$$