Def. Dato uno spazio $\mathcal{U}$ di funzioni, si dice FUNZIONALE definito nel dominio $\mathcal{U}$ una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in \mathcal{U}$ associa un numero (reale)

$$F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

Def. VARIAZIONE di un FUNZIONALE:

$$\boxed{\delta F[u, \delta u] = \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \Big|_{\alpha = 0}}$$

← generalizzazione ai funzionali delle derivate direzionali di funzioni a più variabili

Caso particolare:

$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x)\, dx \implies \delta F[u, \delta u] = \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

Def. Diciamo che un funzionale F def. in $\mathcal{U}$ è STAZIONARIO in u, o che u è pto di stazionarietà, se

$$\delta F[u, \delta u] = 0 \qquad \forall \delta u \quad (\text{t.c. } u + \delta u \in \mathcal{U})$$

Prop. Dato $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx$, allora

u è pto di staz. di F per variazioni nulle agli estremi $\iff$ $\underbrace{\frac{d}{dx} \frac{\partial L(u)}{\partial u'} - \frac{\partial L(u)}{\partial u} = 0}_{}$

detta EQ. di EULERO-LAGRANGE associata al funzionale F

Dim.

$$\delta F[u, \delta u] = \cancel{\frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \Big|_{x_i}^{x_f}} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u \, dx$$

$= 0$ se $\delta u = 0$ agli estremi

$\Leftarrow$: è ovvio: $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$, allora $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$ //

$\Rightarrow$: se $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$, allora

$$\int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \delta u \, dx = 0$$

Dim per assurdo: assumiamo che $\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)(x) = 0$ non sia soddisfatta per un $x_0 \in [x_i, x_f]$, cioè $\exists x_0$ t.c.

$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)(x_0) \neq 0$; allora per continuità

$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)(x) \neq 0$ in un INTORNO I di x_0;

ma allora $\exists \, \underline{\delta u}$ (t.c. $\delta u(x) = 0$ se $x \notin I$, $\delta u(x) > 0$ se $x \in I$)

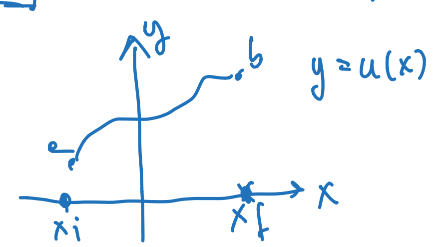
t.c. $\int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)(x) \, \underline{\delta u(x)} dx = \int_I \underbrace{\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right)}_{\neq 0} \underbrace{\delta u}_{> 0} dx \neq 0$

$\cdot > 0 \quad \cdot < 0$

$\leadsto$ se assumiamo che eq. Eulero-Lagr. non sono soddisfatte per un x_0

allora $\exists \, \delta u$ t.c. $\delta F[u, \delta u] \neq 0$, negando ipotesi di $\Rightarrow$. //

ES $L = (1 + u'^2)^{1/2}$ $\qquad F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L \, dx$



lunghezza della curva

u che minimizza F è t.c. $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

$$\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{u''}{\underbrace{(1+u'^2)^{3/2}}_{\neq 0}} = 0 \iff u''(x) = 0 \quad \forall x \in [x_i, x_f]$$

$$\Updownarrow$$

$$u(x) = mx + q \quad \text{RETTA}.$$

PRINCIPIO DI HAMILTON

In meccanica abbiamo a che fare con funzioni nel tempo t che descrivono il moto del sistema: $q_k(t)$, le cui derivate sono $\dot{q}_k(t)$

Iniziamo con un sist. a $n=1$ grado di lib.

$L(q, \dot{q}, t)$ Lagrangiana

- L è una funz. delle tre variabili $q, \dot{q}, t$
- se sostituisco $q \to q(t)$ e $\dot{q} \to \dot{q}(t)$, allora $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ diventa una funz. del tempo.

Def. AZIONE HAMILTONIANA il funzionale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

funzione $q(t)$

→ Un moto $q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO $S[q]$, per variazioni $\delta q(t)$ arbitrarie (nulle agli estremi) se e solo se $q(t)$ soddisfa le eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Cioè tra tutte le traiettorie possibili tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$, il moto reale è quello che rende stazionario $S[q]$, cioè è t.c. $\delta S[q, \delta q] = 0 \ \forall \delta q$.

Generalizziamo a n gradi di libertà

$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ $\quad L: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$

$$S[\bar{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt \qquad \text{AZIONE HAMILTONIANA}$$

Prop. La variazione del funzionale S è data da

$$\delta S[\bar{q}, \delta\bar{q}] = \underbrace{\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ se } \delta q_h \text{ è nulla agli estremi}} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt$$

$\downarrow$

Prop. PRINCIPIO di HAMILTON. Il moto $\bar{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende stazionario il funzionale AZIONE S, per variaz. $\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)$ arbitrarie e nulle agli estremi

$\Longleftrightarrow$ $\bar{q}(t)$ soddisfa le eq. di Lag.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, n$$

Noi siamo partiti da PRINCIPIO che $\bar{F} = m\bar{a}$ $\Longrightarrow$ princip. di Hamilton

Si poteva anche formulare la MECCANICA CLASSICA assumendo come principio il PRINCIPIO DI HAM. $\Rightarrow$ eq. Lagr. $\Rightarrow$ $\bar{F} = m\bar{a}$

Dal principio di Ham. si deducono immediatam. le proprietà di invarianza delle eq. di Lag.

1) Inv. per CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\bar{q} = \bar{q}(\tilde{\bar{q}}, t)$$

$$\tilde{L}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t) = L(\bar{q}(\tilde{\bar{q}}, t), \dot{\bar{q}}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t), t)$$

Il moto $\bar{q}(t) = \bar{q}(\tilde{\bar{q}}(t), t)$

Allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\bar{\tilde{q}}(t), \dot{\bar{\tilde{q}}}(t), t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

stazionario in $\bar{\tilde{q}}(t)$ $\iff$ stazionario in $\bar{q}(t) = \bar{q}(\bar{\tilde{q}}(t), t)$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\bar{\tilde{q}}(t)$ risolve eq. Lag. per $\tilde{L}$ $\iff$ $\bar{q}(t)$ risolve eq. Lag per L

2) Abbiamo stesse eq. di Lagr. se L e L' differiscono per una certa espressione $\varphi(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

(φ t.c. $\varphi(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t)$)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \qquad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t))\, dt$$

$$\downarrow$$

$$S' = S + F(\bar{q}(t))\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$\Rightarrow$ se estremi fissati ($\delta\bar{q}(t_1) = 0 = \delta\bar{q}(t_2)$) $\Rightarrow \delta F(q(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ e allora $\delta S' = \delta S$

//

LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ $\quad (\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

è chiamata COSTANTE DEL MOTO (o INTEGRALE PRIMO) se

la funz. composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è costante in t, cioè

$$\frac{d}{dt} I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = 0 \qquad \text{per } \bar{q}(t) \text{ che soddisfa le eq. di Lagrange}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_\ell} \ddot{q}_\ell \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

⇝ Se conosco la funzione $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$, allora posso scrivere l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \underset{\text{cost}}{I_0}$$

← Famiglia (al variare di I_0) di Eq. diff. del 1° ordine!

↓

Date K cost. del moto, posso "sostituire K eq. di Lag. (del 2° ord.) con K eq. diff del 1° ord."

(Eq. di Lag. sono del 2° ordine)

Conservazione dell'ENERGIA

Def. Per sist. Lag. generico a n gradi di lib. e Lag. $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$,

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$:

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^{n} \left(\cancel{\ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} + \dot{q}_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_h} \right) -$$

$$- \sum_{m=1}^{n} \left(\dot{q}_m \frac{\partial L}{\partial q_m} + \cancel{\ddot{q}_m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \Big(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_k}}_{\text{eq. Lagr.}} \Big) - \frac{\partial L}{\partial t}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$$

se $\bar{q}(t)$ soddisfa eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ Se L NON dipende esplicitamente da t allora $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ è una COSTANTE DEL MOTO.

Per un sist. meccanico $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \cancel{t}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q})$

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{hk} a_{hk}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_k$$

$\to$ è una funzione OMOGENEA di grado 2 in $\dot{q}_h$

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$$

Def. Funz. $f(x_1, \dots, x_n)$ si dice OMOGENEA di grado α se $\forall \lambda > 0$ e ogni scelta di $x_1, \dots, x_n$, si ha

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$$

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1$ $\quad \alpha = 2$

$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2^2/x_1}$ $\quad \alpha = 1/2$

Lemma f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha \cdot f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda} \left(f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) - \lambda^\alpha f \right) \Big|_{\lambda=1} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f \Big|_{\lambda=1}$ //

$$E = \sum_{k=1}^{n} \dot q_k \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k}}_{T \text{ è om. con } \alpha = 2} - T + V = 2T - T + V =$$

$$= T + V$$

- Se forze puram. pos. E è l'en. tot. del sistema meccanico
- Se $V = V_0(\bar q) + V_1(\bar q, \dot{\bar q})$

lin. in $\dot{\bar q}$ (cioè om. con $\alpha = 1$)

allora $$E = \sum_k \dot q_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \sum_k \dot q_k \frac{\partial V_1}{\partial \dot q_k} - T + V_0 + V_1$$

$$= 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$

(Forze associate a V_1 sono $\perp$ alla velocità e quindi compiono lavoro nullo).

Coordinate ignorabili o cicliche.

Consideriamo un sistema Lagr. a n gradi di lib. e supponiamo che L NON dipenda da alcune coord. (dette COORD. CICLICHE), ad esempio $q_{m+1}, \dots, q_n$

cioè

$$L(\bar q, \dot{\bar q}, t) = L(q_1, \dots, q_m, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t)$$

c'è bisogno che T dip. da tutte le $\dot q_h$ affinché sia def. pos.

[Possiamo def. delle funz. $p_\ell(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ dette MOMENTI CONIUGATI]

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_\ell(q(t),\dot{q}(t),t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \overset{\text{eq. Lagr.}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\ell} = 0 \qquad \ell = m+1,\dots,n$$

$\Rightarrow$ abbiamo che i mom. coniugati p_ℓ $(\ell = m+1,\dots,n)$ sono COSTANTI DEL MOTO.

[p_ℓ è detto momento coniugato di q_ℓ]

Usiamo questi integrali primi (cost. moto) per ridurre il numero di gradi di libertà.

– Prendiamo $p_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n)$

e scriviamo la relaz.

$$(*) \qquad \underset{\text{cost}}{\tilde{p}_\ell} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,\underbrace{\dot{q}_{m+1},\dots,\dot{q}_n}) \qquad \ell = m+1,\dots,n$$

$\to$ $n-m$ relazioni nelle $n-m$ variabili $\dot{q}_{m+1},\dots,\dot{q}_n$

$\Rightarrow$ invertiamo le relazioni $(*)$ nelle $\dot{q}_{m+1},\dots,\dot{q}_n$

$$\to \quad \dot{q}_\ell = u_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_m,\tilde{p}_{m+1},\dots,\tilde{p}_n,t)$$

— Def.

$$L^{*}(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,t\,;\underbrace{\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n}^{n-m\ \text{PARAMETRI}}) \equiv$$

m gradi di libertà

$$\equiv L\left(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,u_{m+1}(q,\dot q,\tilde p,t),\dots,u_n(q,\dot p,\tilde p,t)\right)$$

$$-\sum_{\ell=m+1}^{n}\tilde p_\ell\, u_\ell(q,\dot p,\tilde p,t)$$

$$\left[\quad L^{*}=\left(L-\sum_{k=m+1}^{n}\tilde p_k\,\dot q_k\right)\Bigg|_{\dot q_\ell=u_\ell \quad \ell=m+1,\dots,n}\quad\right]$$