Localizzazione :

Sia δO la variaz. supersim. di qualche "operatore" $O(\phi, \psi_1, \psi_2)$

$$\langle \delta O \rangle = \frac{1}{Z} \int d\phi\, d^2\psi\, e^{-S} \delta O \overset{S \text{ è inv.}}{=}$$

$\delta\phi = \epsilon_1 \psi_1 + \epsilon_2 \psi_2$

$\delta\psi_1 = \epsilon_2 \partial h$

$\delta\psi_2 = -\epsilon_1 \partial h$

Variaz. rispetto susy

$$= \frac{1}{Z} \int d\phi\, d^2\psi\, \delta\left(\underbrace{e^{-S} O}_{\text{funzione di } \phi, \psi_1, \psi_2}\right)$$

$$\langle \delta O \rangle = 0 \qquad \forall O \text{ funz. di } \phi, \psi_1, \psi_2$$

Scegliamo $\underline{O_g = \partial g \cdot \psi_1}$ per qualche $g(\phi)$.

$$0 = \langle \delta O_g \rangle = \langle \frac{\partial O_g}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial O_g}{\partial \psi_1} \delta\psi_1 + \cancel{\frac{\partial O_g}{\partial \psi_2} \delta\psi_2} \rangle =$$

susy $\epsilon_1 = -\epsilon_2 \equiv \epsilon$

$$= \langle \partial^2 g \cdot \psi_1 \cdot (\epsilon \psi_1 - \epsilon \psi_2) + \partial g \cdot \epsilon \partial h \rangle =$$

$$= \epsilon \langle \partial g\, \partial h - \partial^2 g\, \psi_1 \psi_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle (\partial g\, \partial h - \partial^2 g\, \psi_1 \psi_2) \rangle = 0 \qquad \forall g(\phi)$$

Prendiamo

$$S[h] = \frac{1}{2} (\partial h)^2 - \psi_1 \psi_2 \partial^2 h$$

$$S[h + \delta h] = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial h + \partial \delta h)^2}_{(\partial h)^2 + 2 \partial h \partial \delta h + (\partial \delta h)^2} - \psi_1 \psi_2 (\partial^2 h + \underline{\partial^2 \delta h})$$

$$\delta S_{h \mapsto h+\delta h} = \partial h\, \partial \delta h - \psi_1 \psi_2\, \partial^2 \delta h$$

$$Z[h] = \int d\phi\, d^2\psi\, e^{-S[h]/\hbar}$$

$$\underset{h \mapsto h+\delta h}{\delta Z[h]} = \int d\phi\, d^2\psi\, e^{-S[h]/\hbar} \left(- \frac{\delta S}{\hbar} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\hbar} \int d\phi\, d^2\psi\, e^{-S/\hbar} \left(\partial h\, \partial \delta h - \psi_1 \psi_2\, \partial^2 \delta h \right)$$

$\langle (\partial g\, \partial h - \partial_g^2\, \psi_1 \psi_2) \rangle = 0 \quad \forall g(\phi)$

$$= -\frac{1}{\hbar} \langle \partial h\, \partial \delta h - \psi_1 \psi_2\, \partial^2 \delta h \rangle \overset{\downarrow}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Z è invariante sotto una generica variazione di h

Cioè la funz. di partizione $Z[h]$ non è sensibile alla forma dettagliata di h.

$\leadsto$ consideriamo variaz. del tipo

$$h \mapsto h + \underbrace{\lambda h}_{\delta h} = (1+\lambda) h = \Lambda h$$

$\Rightarrow$ $Z[\Lambda h]$ è indipendente da Λ

$$Z[h] = \int d\phi \, d^2\psi \, e^{-\frac{1}{2}(\partial h)^2/\hbar + \psi_1\psi_2 \partial^2 h/\hbar}$$

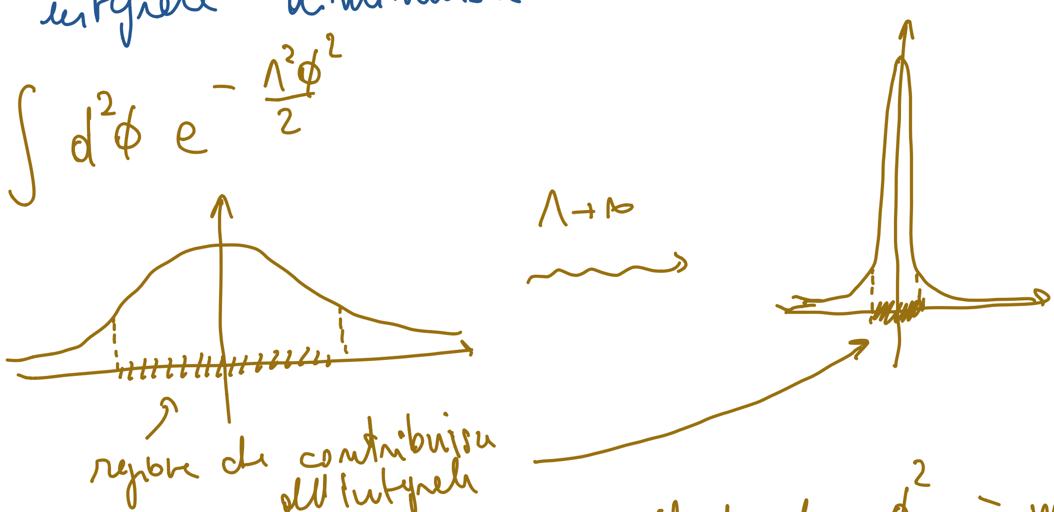
($Z(\Lambda h)$ indip. da Λ)

$$\Big\downarrow \; h \mapsto \Lambda h$$

$$\int d\phi \, d^2\psi \, e^{-\frac{\Lambda^2}{2}(\partial h)^2/\hbar} \, e^{\Lambda \psi_1\psi_2 \partial^2 h/\hbar}$$

Se prendiamo $\Lambda \gg 1$, la regione in ϕ che contribuisce all'integrale diminuisce

$$\int d^2\phi \, e^{-\frac{\Lambda^2\phi^2}{2}}$$



Nel limite $\Lambda \to \infty$ solo il pto dove ϕ^2 è min. contribuisce

Se $\Lambda \to \infty$ e^{-S} sopprime ogni contributo a Z, con l'eccezione di intorni infinitesimi dei pti critici di h, cioè dove $\partial h = 0$

↳ LOCALIZZAZIONE dell'integrale (sui cammini)

E' ora facile calcolare la funz. di partizione.

ϕ_* pto critico di h

$$h(\phi) = h(\phi_*) + \underset{\substack{\| \\ 0}}{\partial h}(\phi_*)(\phi-\phi_*) + \frac{1}{2}\underbrace{\partial^2 h(\phi_*)}_{\equiv c_*}(\phi-\phi_*)^2 + \dots$$

$$S(\phi) = \frac{c_*^2}{2}(\phi-\phi_*)^2 - c_*\psi_1\psi_2$$

$$\hookrightarrow \frac{(\partial h)^2}{2} - \psi_1\psi_2\,\partial^2 h = \frac{[c_*(\phi-\phi_*)]^2}{2} - \psi_1\psi_2\, c_*$$

$$Z = \int d\phi \underbrace{d^2\psi}_{\frac{d\psi_2 d\psi_1}{\sqrt{2\pi/\hbar}}} e^{-\frac{1}{2\hbar}(\partial h)^2 + \psi_1\psi_2\,\partial^2 h/\hbar} =$$

$$= \int \frac{d\phi\, d\psi_2 d\psi_1}{\sqrt{2\pi/\hbar}}\, e^{-\frac{c_*^2}{2\hbar}(\phi-\phi_*)^2}\, e^{c_*\psi_1\psi_2/\hbar} =$$

$$= \int \frac{d\phi\, d\psi_2 d\psi_1}{\sqrt{2\pi/\hbar}} \left(\cancel{1} + \psi_1\psi_2\frac{c_*}{\hbar}\right) e^{-\frac{c_*^2}{2\hbar}(\phi-\phi_*)^2}$$

$$= +\frac{c_*\sqrt{\hbar}}{\hbar\sqrt{2\pi}} \int d\phi\, e^{-c_*^2(\phi-\phi_*)^2/2\hbar} =$$

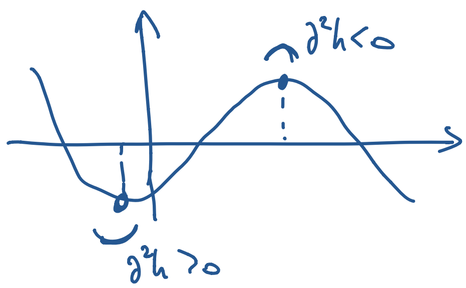
$$= \frac{c_*}{\sqrt{c_*^2}} = \mathrm{sgn}\left(\partial^2 h(\phi_*)\right)$$

Se abbiamo diversi pti critici, dobbiamo sommare tutti i contributi ad essi relativi.

$$Z = \sum_{\phi_* \text{ t.c. } \partial h(\phi_*)=0} \operatorname{sgn}\left(\partial^2 h(\phi_*)\right)$$

- Z non dipende dalla forma di h
- se h è un POLINOMIO
  - di grado DISPARI $\Rightarrow$ il numero degli zeri di ∂h è pari e il segno di $\partial^2 h$ è alternato

Es.



$$\Rightarrow Z\left[h^{\text{Pol.}}_{\text{DISPARI}}\right] = 0$$

  - di grado PARI $\Rightarrow Z\left[h^{\text{Pol.}}_{\text{PARI}}\right] = \pm 1$

- La funz. di part. $Z[h^{\text{Pol.}}] = 0, -1, 1$.
- Questo conto fatto senza calcolare molto, anche per un h molto complicato;

  h pol. generico ha termine quadratico (libero) e termini di grado più alto (interazione)

  Integrale potrebbe essere calcolato PERTURBATIVAMENTE con le tecniche imparate nelle lezioni precedenti (Diagrammi di Feynman)

In particolare, per h pol. dispari, dovreste vedere che sommando tutti gli innumerevoli diagrammi di Feynman avvengono cancellazioni fino a $\Rightarrow$ vero 6 zero.

$\rightarrow$ Localizzazione è utile per calcolare anche alcuni correlatori.

Prendiamo $O_i(\phi, \psi)$ che obbediscano

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{SUSY}}}{\delta}\, O_i(\phi,\psi) = 0$$

Allora

$$\langle \prod_i O_i \rangle = \int \frac{d\phi\, d^2\psi}{\sqrt{2\pi/g}}\, e^{-S/g} \prod_i O_i$$

$h \mapsto h+g$

scegliamo O_j t.c. questo sia vero

$$\underset{h \mapsto h+g}{\delta} \langle \prod O_i \rangle = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{susy}}}{\delta} O_j \prod_i O_i \rangle$$

$$\parallel$$

$$\langle \delta (O_j \prod_i O_i) \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ ancora, l'integrale localizza (stesso procedimento di prima)

- Se uno degli operatori O_i è $= \underbrace{\delta O'}_{susy}$, (*)

allora $\langle \prod_i O_i \rangle = \langle \delta O' \prod_{i'} O_{i'} \rangle = \langle \delta (O' \prod_{i'} O_{i'}) \rangle = 0$

$\Rightarrow$ tutti i correlatori in cui un op. è $= \underset{susy}{\delta} O'$ sono nulli $\to$ non-interessanti

(*) Se $\underline{O_i = \delta O'}$ allora $\delta O_i = \delta^2 O' = 0$

$\Downarrow$

Gli operatori che generano correlatori non-triviali sono O_i t.c. $\underset{susy}{\delta} O_i = 0$, ma $O_i \neq \underset{susy}{\delta} O'$

Tali operatori O_i sono detti

CHIUSI, ma NON-ESATTI

e descrivono la COOMOLOGIA dell'op. nilpotente δ.

[Analogia con le p-forme chiuse, ma non-esatte

$\rightsquigarrow$ coomologia dell'op. d ← differenziale

ω_p è chiusa se $d\omega_p = 0$ $\quad (d^2 = 0)$

ω_p è esatta se $\omega_p = d\alpha_{p-1}$]

Coomologia è data dalle classi di equiv. con relaz. di equiv.

$$\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2 \quad \text{se} \quad \mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 = \delta \mathcal{O}'$$

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{se} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\alpha$$

$$[\mathcal{O}] = \{ \mathcal{O} + \delta \mathcal{O}' \mid \mathcal{O}' \text{ op.} \}$$

$$[\omega_p] = \{ \omega_p + d\alpha_{p-1} \mid \alpha_{p-1} \ (p-1)\text{-forma} \}$$

GEOM. DIFF.

→ Green - Schwarz - Witten "String Theory 2"

→ Arnold "Metodi matematici della Meccanica Classica"