QFT in $d=1$ (QM)

QFT : $\phi : M \to N$ $\left(\text{se } M \text{ compatto } \underset{\text{funz. di partiz.}}{Z} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S} \right)$

funz. di partiz.

$\mathcal{C}$

$\{ \text{mappe} : M \to N \}$

sp. delle config.

In $d=1$ ci sono due manifold M compatte

1) INTERVALLO parametrizzato da $t \in [0,T]$

2) CERCHIO " " $t \in [0,T]$

con $0 \sim T$

$(t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } t \simeq t + T)$

Un CAMPO su M è una mappa

$$x : M \longrightarrow N$$

dove N è una VARIETÀ RIEMANNIANA di dimensione n e con metrica G.

Se usiamo coord. x^a $a = 1, \ldots, n$ su N, abbiamo

n CAMPI $x^a : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto x^a(t)$$

Azione standard :

$$S[x] = \int_M \left[\frac{1}{2} G_{ab}(x) \dot{x}^a \dot{x}^b + V(x) \right] dt$$

stiamo usando "metrica" Euclidea su M

sp. EUCLIDEO M sp. MINKOWSKI M

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E[\phi]} \quad \xleftarrow{t \mapsto -it} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \, e^{\int dt \left(-\frac{m\dot{x}^2}{2} - V\right)} \quad \longleftarrow \quad \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}\phi \, e^{i\int dt' \left(m\frac{\dot{x}^2}{2} - V(x)\right)}$$

$$\delta S[x,\delta x] = \int_M \left[G_{ab}(x) \cdot \dot{x}^a \delta\dot{x}^b + \frac{1}{2}\frac{\partial G_{ab}}{\partial x^c}\delta x^c \dot{x}^a \dot{x}^b + \frac{\partial V}{\partial x^c}\delta x^c \right] dt$$

$$= \int_M \left[-\frac{d}{dt}\left(G_{ac}\dot{x}^a\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial G_{ab}}{\partial x^c}\dot{x}^a\dot{x}^b + \frac{\partial V}{\partial x^c} \right] \delta x^c \, dt$$

$$+ \left. G_{ab}\dot{x}^a \delta x^b \right|_{\partial M}$$

$\delta S[x,\delta x] = 0 \quad \forall \delta x \quad$ (t.c. $=0$)

$\rightarrow$ eq. Lagr. $$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = G^{ab}(x)\frac{\partial V}{\partial x^b}$$

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}G^{ad}\left(\partial_b G_{cd} + \partial_c G_{bd} - \partial_d G_{bc}\right)$$

connessione di Levi-Civita

$\updownarrow$

Worldline QM

$x(t)$ viene interpretata come la traiettoria della particella in N

$$x : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"worldline"}}}{M} \longrightarrow \underset{\text{"TARGET SPACE"}}{N}$$

Eq. di Lagrange $\rightsquigarrow$ se $V=0$, particella si muove classicamente lungo una geodetica

QM è un toy-model per QFT ($d=1$)

QM : prendiamo uno sp. di Hilb. $\mathcal{H}$ e un'Hamiltoniana H

Nella nostra situazione $\mathcal{H} = L^2(N)$ (m=1 part.)

e $H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ laplaciano in N

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^a}\left(\sqrt{G}\, G^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b}\right)$$

Ampiezza : particella che viaggia da y_0 a $y_1 \in N$ in interv. di tempo T'

Minkowski $\quad \hbar = 1$

$$\langle y_1 | e^{-iHT'/\hbar} | y_0 \rangle \quad \text{(Sch. pict.)}$$

autost. di op. $\hat{Y}$ con aut. y_1

$$\langle y_1, T' | y_0, 0 \rangle \quad \text{(Heis. pict.)}$$

Ampiezza in Eucl. sign.

$$K_T(y_0, y_1) = \langle y_1 | e^{-HT} | y_0 \rangle$$

"Heat Kernel"

$\Updownarrow$

"propagatore"

Se conosco $K_T(y_0, y_1)$, posso calcolare

$$\langle y_1 | e^{-iHT'} | y_0 \rangle = K_{iT'}(y_0, y_1)$$

(" continuaz. analitica in T)

Il "Heat Kernel" è una funzione su $I \times N \times N$, che è soluz. dell'eq.

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} K_t(x,y) + H K_t(x,y) = 0$$

con condiz. al bordo $K_0(x,y) = \delta(x-y)$

[In Mink. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K_{it}(x,y) = H K_{it}(x,y)$ eq. di Sch.]

Se $V \equiv 0$ e $(N, G_{ab}) = (\mathbb{R}^n, \delta_{ab})$ $\Bigg\}$ $H = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b}$ e

$$K_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi\hbar t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\hbar t}}$$

Per (N, G) generici, la soluz. è più complicata, $(V \equiv 0)$ ma ha una forma asintotica per t piccoli:

$$\lim_{\Delta t \to 0} K_{\Delta t}(x,y) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar\Delta t)^{n/2}}\, a(x)\, e^{-d(x,y)^2/2\hbar\Delta t}$$

$d(x,y)$ = distanza misurata lungo una geodetica da x a y (risp. metrica G_{ab})

$$a(x) = \sqrt{G(x)}\,\left(1 + Ric_G(x) + \dots\right)$$

$K_T(y_0, y_1)$ permette di calcolare le ampiezze di transizione tra stati generici

$$\langle \varphi | e^{-TH} | \psi \rangle = \int dy_0 \int dy_1 \, \langle \varphi | y_1 \rangle \langle y_1 | e^{-TH} | y_0 \rangle \langle y_0 | \psi \rangle =$$

$$= \int dy_0\, dy_1 \, \varphi^*(y_1)\, \psi(y_0)\, K_T(y_0, y_1)$$

Per $T=0$ $K_T(y_0,y_1) = \delta(y_0 - y_1) \Rightarrow$ ci riconduciamo alla usuale formula del prodotto scalare in $\mathcal{H} = L^2(N)$.

Esempio: particella libera in $\mathbb{R}$ (1 grado di lib.),

il propagatore è

$$K_T(y_0,y_1) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2\hbar T}(y_1-y_0)^2}$$

Controlliamo che K_T soddisfa eq. $\hbar\frac{\partial}{\partial T}K_T(y_0,y_1) + H K_T(y_0,y_1) = 0$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial T}K_T(y_0,y_1) = K_T(y_0,y_1)\left(-\frac{\hbar}{2T} + \frac{m}{2T^2}(y_1-y_0)^2\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}K_T(y_0,y_1) = \frac{\partial}{\partial y_0}\left\{-\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{\cancel{2m}}K_T(y_0,y_1)\frac{\cancel{2m}}{2\cancel{\hbar}T}(y_1-y_0)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_0}\left\{(y_0-y_1)\frac{\hbar}{2T}K_T(y_0,y_1)\right\} =$$

$$= \frac{\hbar}{2T}K_T(y_0,y_1) + \frac{\hbar}{2T}(y_0-y_1)K_T(y_0,y_1)(y_1-y_0)\frac{2m}{2\hbar T}$$

$$= K_T(y_0,y_1)\left[\frac{\hbar}{2T} - (y_0-y_1)^2\frac{m}{2T^2}\right]$$

//

Feynman Path Integral

$$\langle y_1 | e^{-HT/\hbar} | y_0 \rangle = \langle y_1 | \overbrace{e^{-H\Delta t/\hbar} \cdots e^{-H\Delta t/\hbar}}^{N\text{-volte}} | y_0 \rangle$$

$\mathbb{1} = \int d^n x \, |x\rangle\langle x|$

$$\| \quad K_T(y_0, y_1)$$

$$= \int d^n x_1 \cdots d^n x_{N-1} \langle y_1 | e^{-H\Delta t/\hbar} | x_{N-1} \rangle \cdots \underbrace{\langle x_2 | e^{-H\Delta t/\hbar} | x_1 \rangle}_{K_{\Delta t}(x_1, x_2)} \cdot \langle x_1 | e^{-H\Delta t/\hbar} | y_0 \rangle$$

$$= \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} d^n x_i \right) \underbrace{K_{\Delta t}(x_{N-1}, y_1) \cdots K_{\Delta t}(x_1, x_2) K_{\Delta t}(y_0, x_1)}_{N}$$

Prop. di convoluz. del nucleo del calore

$$K_{t_1+t_2}(x_1, x_3) = \int d^n x_2 \, K_{t_2}(x_2, x_3) K_{t_1}(x_1, x_2)$$

$(V \equiv 0)$ e prendiamo lim. in cui $\Delta t \to 0$ $(N \to \infty)$

$$T = N \cdot \Delta t$$

$\uparrow$ fissato (finito)

Δt piccolo $\to$ uso approssimaz. per $K_{\Delta t}$

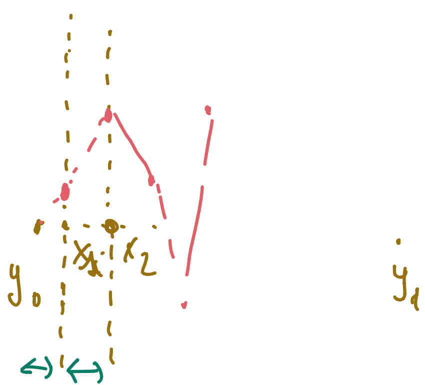
$$\langle y_1 | e^{-HT/\hbar} | y_0 \rangle \sim \frac{1}{(2\pi\hbar\Delta t)^{n/2}} \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{d^n x_i \; a(x_i)}{(2\pi\hbar\Delta t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{d(x_{j+1}, x_j)}{\Delta t} \right)^2}$$

$x_0 = y_0 \quad x_N = y_1$

- Ora vorremmo prendere il LIMITE $\Delta t \to 0$ $(N \to \infty)$

- Formalmente vorremmo def. la misura

$$\mathcal{D}x \overset{?}{\equiv} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi\hbar\Delta t}\right)^{n\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} d^n x_i \, g(x_i)$$



$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{d(x_{i+1}, x_i)}{\Delta t}\right)^2 = G_{ab}\dot{x}^a \dot{x}^b$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{d(x_{i+1}, x_i)}{\Delta t}\right)^2 \overset{?}{=} \int_0^T \frac{1}{2} G_{ab}(x)\dot{x}^a \dot{x}^b \, dt$$

$$= S[x]$$

(con $V \equiv 0$)

se accettiamo questi limiti

$$\langle y_1 | e^{-HT/\hbar} | y_0 \rangle \equiv K_T(y_0, y_1) = \int_{\mathcal{C}_T[y_0, y_1]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar}$$

spazio delle mappe (CAMMINI) $x : [0,T] \to N$

t.c. $x(0) = y_0$ $\quad x(T) = y_1$

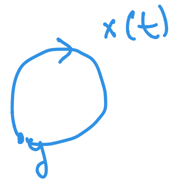
FUNZIONE DI PARTIZIONE

$$Z(T) \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\left(e^{-TH/\hbar}\right)$$

particella che si muove in $N = \mathbb{R}^n$

$$Z(T) = \int d^n y \, \langle y | e^{-TH/\hbar} | y \rangle$$

$$= \int_N d^n y \int_{\mathcal{C}_T[y,y]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar}$$



$x(0) = x(T)$

cammini

$\mathcal{C}_T[y,y]$: $y = x(0)$, $y = x(T)$ — mappe da S^1 a N con pto base y

$$= \int_{\mathcal{C}_{S^1}} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar}$$

$\mathcal{C}_{S^1}$: mappe da S^1 a N
(immagine su N è topologicam. un cerchio)

$\rightsquigarrow$ funz. di part. su un universo compatto $M = S^1$