Se $\frac{\partial L}{\partial q_\ell} \equiv 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell} = 0 \Rightarrow p_\ell$ cost. del moto

q_ℓ è detta coord. ciclica

$\tilde p_\ell = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\dot q_{m+1},\dots,\dot q_m)$ $\ell = m+1,\dots,m$ $\Rightarrow$ $\dot q_\ell = u_\ell(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_m,t)$

$\tilde p_\ell$ "cost"

$$L^*(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,t;\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_m) \equiv L(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m,u_{m+1}(q,\dot q,\tilde p,t),\dots,u_m(q,\dot q,\tilde p,t)) - \sum_{\ell=m+1}^{m} \tilde p_\ell\, u_\ell(q,\dot q,\tilde p,t)$$

Lagrangiana ridotta

Prendere L^* e trattarla come la lagrangiana di un sistema (olonomo) a m gradi di libertà.

↓

Eq. Lagr. di L^*

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{\ell=m+1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial q_h} - \sum_{\ell=m+1}^{m} \tilde p_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_h} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} + \sum_{\ell=m+1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}\frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h} - \sum_{\ell=m+1}^{m} \tilde p_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \dot q_h}\right]$$

$h = 1,\dots,m$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \qquad h = 1,\dots,m$$

↑ valutiamo su $q(t)$

$\Rightarrow$ Le eq. di Lagr. di L^* coincidono con le prime m eq. di Lagr. di L

Le $q_h(t)$ $(h=1,\dots,m)$ che risolvono eq. di Lagr. di L^* risolvono anche le eq. di Lagr. di L

Come determino le $q_k(t)$ $k = m+1,\dots,n$? Le rispettive eq. di Lagr. sono state usate per ricavare le $\dot q_k$ in funz. di $q_h, \dot q_h$ $h=1,\dots,m$

cioè $\dot{q}_k(t) = u_k(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, t)$

eq. differenziale per $\dot{q}_k(t)$ con $k = 1, \dots, n$

risolta per quadrature (= integrazione)

è una funz. del tempo nota, una volta risolte le eq. di Lagr. di L^*

ES Moto di un pto materiale su un piano verticale.

$V(x,y) = mgy$ $\quad T(\dot{x},\dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy$$

non dip. esplicitam. da x, cioè $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ è cost. del moto $\rightsquigarrow p_x = m\dot{x}$ (componente della quantità di moto lungo x)

cost $\to \tilde{p}_x = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m} \leftarrow u_x(y, \dot{y}, \tilde{p}_x)$

$$L^* = L - \tilde{p}_x \dot{x} \Big|_{\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m}}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\tilde{p}_x}{m}\right)^2 + \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - \tilde{p}_x\left(\frac{\tilde{p}_x}{m}\right) = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - \frac{\tilde{p}_x^2}{2m}$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}$ $\qquad \ddot{y} = -g \to y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$

$\frac{\partial L^*}{\partial y} = -mg$

$\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m} \to x(t) = \frac{\tilde{p}_x}{m}t + x_0$

Osservazione:

- Se L è indip. da q_ℓ, allora $p_\ell \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}$ è cost. del moto

  ⇓ si può anche esprimere:

Prendiamo una famiglia a un parametro α di trasf.

$$\bar{q} \mapsto \bar{q}' = \bar{\varphi}(\alpha, \bar{q})$$
$$\dot{\bar{q}} \mapsto \dot{\bar{q}}' = \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

e ci restringiamo al caso in cui questa trasf. consiste a traslare le coord. q_ℓ per un numero α

$$\varphi_h(\alpha, \bar{q}) = q_h + \alpha \delta_{h\ell} \quad (*)$$
$$\psi_h(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \dot{q}_h$$

L è indip. da q_ℓ $\Longleftrightarrow$ L è invariante (non cambia) sotto la trasf. $(*)$

⇓

$\exists$ una cost. del moto

$L(\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

Legge di conservazione ($\exists$ cost. del moto) $\longleftrightarrow$ proprietà di invarianza di L.

Prop. TEOREMA DI NÖTHER

Sia $\bar{q} \mapsto \bar{\varphi}(\alpha, \bar{q})$ una TRASFORMAZIONE DI SIMMETRIA CONTINUA (una famiglia di diffeomorf. locali dipendenti da un parametro α) che sia definita e differenziabile in α (in un intorno di $\alpha=0$) ↳ in particolare CONTINUA (*)

e soddisfacente

$$\bar{\varphi}(0, \bar{q}) = \bar{q}$$

Sia $\dot{q} \mapsto \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_k \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

[(*) ES. trasf. continua $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in [0, 2\pi]$

ES. trasf. discreta $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \end{pmatrix}$ con $\alpha = 1, -1$]

Se per ogni scelta di $\bar{q}, \dot{\bar{q}}$ e α risulta che

$$L(\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad (**)$$

(A)

allora la funzione

$$P(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha}(0, \bar{q})\, p_m(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$$

è una COSTANTE DEL MOTO per le eq. di Lagr. associate a L.

[(**) ES. di L inv. sotto rotaz.

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

$$\bar{\varphi}(\alpha, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, q_1 + \sin\alpha\, q_2 \\ -\sin\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \dot{\bar{q}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, \dot{q}_1 + \sin\alpha\, \dot{q}_2 \\ -\sin\alpha\, \dot{q}_1 + \cos\alpha\, \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$L(\bar\varphi(\alpha,\bar q),\bar\psi(\alpha,\bar q,\dot{\bar q})) = \frac{m}{2}\left((\cos\alpha\,\dot q_1+\sin\alpha\,\dot q_2)^2+(-\sin\alpha\,\dot q_1+\cos\alpha\,\dot q_2)^2\right)$$

$$-\frac{m}{2}\omega^2\left((\cos\alpha\,q_1+\sin\alpha\,q_2)^2+(-\sin\alpha\,q_1+\cos\alpha\,q_2)^2\right)=$$

$$=\frac{m}{2}(\dot q_1^2+\dot q_2^2)-\frac{m\omega^2}{2}(q_1^2+q_2^2)=L(\bar q,\dot{\bar q})\ \Big]$$

Dim. $L(\bar\varphi(\bar q,\alpha),\bar\psi(\bar q,\dot{\bar q}(\alpha),t)) = L(\bar q,\dot{\bar q},t)$

↓ indip. da α

$$\Rightarrow 0=\frac{d}{d\alpha}L(\bar\varphi(\alpha,\bar q),\bar\psi(\alpha,\bar q,\dot{\bar q}),t)\Big|_{\alpha=0} =$$

$\psi_h=\sum_k \frac{\partial\varphi_h}{\partial q_k}\dot q_k$

$$=\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar\varphi,\bar\psi,t)\cdot\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}+\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}(\bar\varphi,\bar\psi,t)\cdot\frac{\partial\psi_h}{\partial\alpha}\right]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar q,\dot{\bar q},t)\cdot\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q)+\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}(\bar q,\dot{\bar q},t)\cdot\frac{\partial\psi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q,\dot{\bar q})\right]$$

↙ funz. di $\bar q,\dot{\bar q},t$ ($2n+1$ variab.)

Valut'amo la relaz. sopra lungo un moto che SODDISFA le EQ. DI LAGR.

$$0=\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q(t))+\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q(t),\dot{\bar q}(t))\right]$$

$\frac{\partial L}{\partial q_h}$: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)$

$\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}$: $\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}\right)\dot q_k=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}$

$$=\sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}+\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\alpha}(0,\bar q(t))\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot q_h}(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t)\right]$$

$$0=\frac{d}{dt}P(\bar q(t),\dot{\bar q}(t),t) \Longrightarrow P \text{ è una cost. del moto} \quad //$$

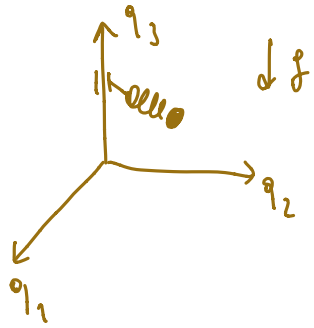
ES. Invariante per rotazioni

$\frac{1}{2}k d^2 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$

$$L(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) = \frac{m}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{m}{2}\dot q_3^2 - mgq_3$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\, q_1 + \sin\alpha\, q_2 \\ -\sin\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3(\alpha, \bar q) = q_3$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\dot q_1 + \sin\alpha\,\dot q_2 \\ -\sin\alpha\,\dot q_1 + \cos\alpha\,\dot q_2 \end{pmatrix} \qquad \psi_3(\alpha, \bar q, \dot{\bar q}) = \dot q_3$$



Calcoliamo $P = \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial \varphi_h(0, \bar q)}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}$

$$\frac{\partial \varphi_1(0)}{\partial \alpha} = -\sin\alpha\, q_1 + \cos\alpha\, q_2 = q_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = m\dot q_1$$

$$\frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial \alpha} = -\cos\alpha\, q_1 - \sin\alpha\, q_2 = -q_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q_2} = m\dot q_2$$

$$\frac{\partial \varphi_3(0)}{\partial \alpha} = 0 \qquad = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot q_3} = m\dot q_3$$

$$P = q_2(m\dot q_1) + (-q_1)\cdot(m\dot q_2) + 0\cdot(m\dot q_3) = m(\dot q_1 q_2 - \dot q_2 q_1)$$

$$= -(\bar q \times m\dot{\bar q})_3 = -M_3$$

componente del MOMENTO ANGOLARE lungo l'asse q_3.

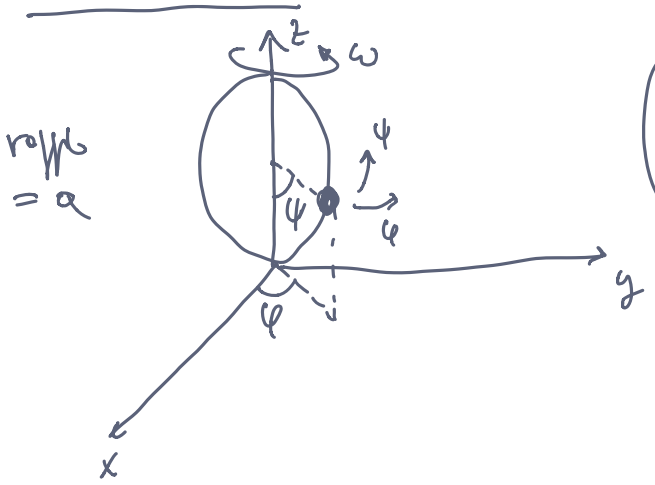
⇒ Se un sistema (L) è invariante per ROTAZIONI attorno ad un asse, la componente lungo quell'asse del MOMENTO ANGOLARE è conservata lungo il moto (cost. del moto)

Invarianza per ROTAZIONI ⟷ Conservazione del MOMENTO ANGOLARE

Analogamente:

Invarianza per TRASLAZIONI ⟷ Conservazione della QUANTITÀ DI MOTO

ESERCIZIO



$\bar{r}(\bar{q})$

fissato un vincolo → unica coord. libera è ψ

$\varphi = \omega t$

$x = a \operatorname{sen}\psi \cos\omega t$

$y = a \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\omega t$

$z = a - a\cos\psi$

$\dot{x} = a\dot{\psi}\cos\psi\cos\omega t - a\omega \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\omega t$

$\dot{y} = a\dot{\psi}\cos\psi \operatorname{sen}\omega t + a\omega \operatorname{sen}\psi \cos\omega t$

$\dot{z} = a\dot{\psi}\operatorname{sen}\psi$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} a^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2\psi + \frac{m}{2} a^2 \dot{\psi}^2$$

caso particolare di "derivata totale"

$$V = mgz = mga - mga\cos\psi$$

termine costante che non contribuisce alle eq. di Lagr.

$$L = \frac{m}{2} a^2 (\dot{\psi}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2\psi) + mga\cos\psi - \cancel{mga}$$

Eq. di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{d}{dt}(ma^2\dot{\psi}) = ma^2\ddot{\psi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = ma^2\omega^2 \operatorname{sen}\psi\cos\psi - mga\operatorname{sen}\psi$$

$$\ddot{\psi} = \omega^2 \operatorname{sen}\psi\cos\psi - \frac{g}{a}\operatorname{sen}\psi$$

← eq. diff. del tipo $\ddot{x} = f(x)$

Quali sono i pti di equilibrio?

↳ quei ψ t.c. $f(\psi) = 0$, cioè dobbiamo risolvere l'eq.

$$\omega^2 \operatorname{sen}\psi\cos\psi - \frac{g}{a}\operatorname{sen}\psi = 0$$

$$\omega^2 \operatorname{sen}\psi \left(\cos\psi - \frac{g}{a}\cdot\frac{1}{\omega^2}\right) = 0$$

↓

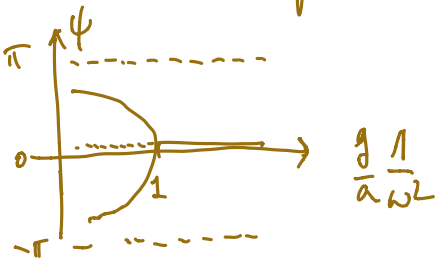
soluz.

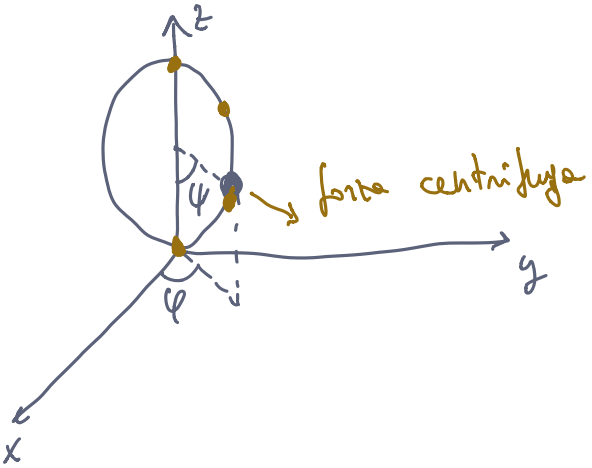
1) $\sin\psi = 0 \quad \rightarrow \quad \psi = 0, \pi$ — queste esistono sempre

2) $\cos\psi = \frac{g}{a}\frac{1}{\omega^2} \quad \rightarrow \quad \psi = \pm \arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$ — queste esistono solo quand $\frac{g}{a}\frac{1}{\omega^2} \leq 1$

"cerchio gira molto velocem."

$\rightsquigarrow$ fenomeno di Biforcazione





ES. considerare stesso sistema, in cui però il cerchio è libero di muoversa "come vuole" (coord libere sono ψ, φ)

- L
- ci sono coord. CICLICHE?
- in caso affermativo, calcolare L^*.