

Momenti angolari, spin e coefficienti di Clebsch-Gordan

Cosa è importante ricordare/sapere...

MATRICI DI PAULI:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le matrici di Pauli sono Hermitiane (quindi rappresentano delle osservabili!) con le seguenti proprietà:

- sono matrici unitarie: $\sigma_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (con $i = x, y, z$)
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma_k$ (con ε^{ijk} tensore di Levi-Civita)
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{I}$ (con \mathbf{I} matrice identità)
- $\det(\sigma_i) = -1$ (determinante)
- $Tr(\sigma_i) = 0$ (traccia)

Le matrici di Pauli hanno due autovalori (± 1) e due autostati (χ_+^i e χ_-^i) ciascuno, che corrispondono alle condizioni di spin up (+1) e down (-1) rispetto agli assi x, y e z. Il generico stato di spin (spinore) può essere espresso come una combinazione lineare dei due autostati χ_{\pm}^i . Ad esempio, se uno spinore è descritto dalla relazione $\chi = c_1\chi_+^{(x)} + c_2\chi_-^{(x)}$, effettuando una misura della componente x dello spin, la probabilità di ottenere *spin up* sarà $|c_1|^2$.

In particolare gli autostati delle matrici di Pauli normalizzati sono:

$$\begin{aligned} \chi_+^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \chi_-^{(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \chi_+^{(y)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & \chi_-^{(y)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ \chi_+^{(z)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \chi_-^{(z)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

COEFFICIENTI DI CLEBSCH-GORDAN:

I coefficienti di Clebsch-Gordan sono un utile strumento per trattare la composizione (somma) di momenti angolari, siano questi momenti angolari orbitali, momenti angolari di spin o l'accoppiamento spin-orbita.

In particolare questi coefficienti permettono di “passare” da una base all'altra nella composizione di momenti angolari. La prima base in questione è quella

che diagonalizza contemporaneamente gli operatori $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_{1z}, \hat{j}_{2z}$ (con j_i i -esimo momento angolare e j_{iz} la relativa componente z) e si indentificano con i vettori $|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle$.

Ad es. nel caso della composizione di momenti angolari orbitali la base sar  costituita da vettori del tipo $|l_1, l_2, m_1, m_2\rangle$, nel caso di accoppiamento spin-orbita da $|l, s, m, m_s\rangle$.

Nella seconda base gli operatori $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ sono diagonali (dove \hat{J}   l'operatore di momento angolare totale) e la base   definita dagli stati $|j_1, j_2, J, J_z\rangle$.

Nel caso di composizione di momenti angolari orbitali avremo stati del tipo $|l_1, l_2, J, J_z\rangle$ mentre, nel caso di accoppiamento spin-orbita $|l, s, J, J_z\rangle$.

E' ovviamente possibile esprimere un elemento di una delle due basi come combinazione lineare degli stati dell'altra e viceversa, secondo le relazioni

$$\begin{aligned}
 |j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle &= \sum_{J, J_z} \langle j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z} | j_1, j_2, J, J_z \rangle |j_1, j_2, J, J_z\rangle \\
 |j_1, j_2, J, J_z\rangle &= \sum_{j_{1z}, j_{2z}} \langle j_1, j_2, J, J_z | j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z} \rangle |j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dove $\langle j_1, j_2, J, J_z | j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z} \rangle = \langle j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z} | j_1, j_2, J, J_z \rangle^*$ sono i *coefficienti di Clebsch-Gordan*. Questi coefficienti sono tabulati in tabelle di questo tipo:

j_1	j_2	J		J_z	
$1 \times 1/2$		$3/2$			
		$+3/2$		$3/2$	$1/2$
$+1$	$+1/2$	1	$+1/2$	$+1/2$	$+1/2$
j_1, j_2	$+1 - 1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	$0 + 1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
		$0 - 1/2$		$2/3$	$1/3$
		$-1 + 1/2$		$1/3$	$-2/3$
				$-1 - 1/2$	1

I due numeri a sinistra (in questo caso $1 \times 1/2$) rappresentano i due momenti angolari coinvolti nella somma (quindi j_1 e j_2), le colonne in alto (cerchio rosso) contengono tutti i possibili valori di $J = |j_1 - j_2| \dots j_1 + j_2$ e, per ogni J , tutti i possibili valori di $J_z = -J \dots + J$. Le righe (cerchio verde) indicano le componenti z dei momenti angolari coinvolti nella somma (j_{1z} e j_{2z}).

Una volta scelti i valori di J, J_z, j_{1z}, j_{2z} , il corrispettivo coefficiente di Clebsch-Gordan si trova all'incrocio tra la riga e la colonna considerata (cerchio giallo).

Da notare che nei coefficienti indicati in tabella è sempre sottointesa una radice quadrata, cioè se in tabella è indicato il valore $2/3$, il coefficiente è in realtà $\sqrt{2/3}$, se il valore è $-1/3$ in coefficiente sarà $-\sqrt{1/3}$.

Esempi:

1. Esprimere lo stato $|j_1, j_2, J, J_z\rangle = |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ nella base $|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle$.

$1 \times 1/2$		$3/2$				
	$+3/2$	$3/2$	$1/2$			
$+1$	$+1/2$	1	$+1/2$	$+1/2$		
	$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$	$3/2$	$1/2$
	0	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$	$-1/2$	$-1/2$
		0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$	$3/2$
		-1	$+1/2$	$1/3$	$-2/3$	$-3/2$
				-1	$-1/2$	1

$$|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3}}}_{c_1} |1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\rangle + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}}_{c_2} |1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle \quad (2)$$

2. Effettuando una misura su j_{1z} dello stato $|j_1, j_2, J, J_z\rangle = |1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, qual è la probabilità di ottenere $j_{1z} = 0$? E $j_{2z} = 0$?

$$P(j_{1z} = 0) = |c_2|^2 = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$P(j_{2z} = 0) = 0$$

$P(j_{2z} = 0) = 0$ dal momento che gli unici valori possibili sono $j_{2z} = \pm \frac{1}{2}$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e, g , for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$

		$1/2 \times 1/2$		$1 \times 1/2$		1×1		$3/2 \times 1/2$		$3/2 \times 1$		$2 \times 1/2$		2×1		$3 \times 1/2$		3×1		$4 \times 1/2$		4×1		$5 \times 1/2$		5×1		$6 \times 1/2$		6×1		$7 \times 1/2$		7×1		$8 \times 1/2$		8×1		$9 \times 1/2$		9×1		$10 \times 1/2$		10×1		$11 \times 1/2$		11×1		$12 \times 1/2$		12×1		$13 \times 1/2$		13×1		$14 \times 1/2$		14×1		$15 \times 1/2$		15×1		$16 \times 1/2$		16×1		$17 \times 1/2$		17×1		$18 \times 1/2$		18×1		$19 \times 1/2$		19×1		$20 \times 1/2$		20×1		$21 \times 1/2$		21×1		$22 \times 1/2$		22×1		$23 \times 1/2$		23×1		$24 \times 1/2$		24×1		$25 \times 1/2$		25×1		$26 \times 1/2$		26×1		$27 \times 1/2$		27×1		$28 \times 1/2$		28×1		$29 \times 1/2$		29×1		$30 \times 1/2$		30×1		$31 \times 1/2$		31×1		$32 \times 1/2$		32×1		$33 \times 1/2$		33×1		$34 \times 1/2$		34×1		$35 \times 1/2$		35×1		$36 \times 1/2$		36×1		$37 \times 1/2$		37×1		$38 \times 1/2$		38×1		$39 \times 1/2$		39×1		$40 \times 1/2$		40×1		$41 \times 1/2$		41×1		$42 \times 1/2$		42×1		$43 \times 1/2$		43×1		$44 \times 1/2$		44×1		$45 \times 1/2$		45×1		$46 \times 1/2$		46×1		$47 \times 1/2$		47×1		$48 \times 1/2$		48×1		$49 \times 1/2$		49×1		$50 \times 1/2$		50×1		$51 \times 1/2$		51×1		$52 \times 1/2$		52×1		$53 \times 1/2$		53×1		$54 \times 1/2$		54×1		$55 \times 1/2$		55×1		$56 \times 1/2$		56×1		$57 \times 1/2$		57×1		$58 \times 1/2$		58×1		$59 \times 1/2$		59×1		$60 \times 1/2$		60×1		$61 \times 1/2$		61×1		$62 \times 1/2$		62×1		$63 \times 1/2$		63×1		$64 \times 1/2$		64×1		$65 \times 1/2$		65×1		$66 \times 1/2$		66×1		$67 \times 1/2$		67×1		$68 \times 1/2$		68×1		$69 \times 1/2$		69×1		$70 \times 1/2$		70×1		$71 \times 1/2$		71×1		$72 \times 1/2$		72×1		$73 \times 1/2$		73×1		$74 \times 1/2$		74×1		$75 \times 1/2$		75×1		$76 \times 1/2$		76×1		$77 \times 1/2$		77×1		$78 \times 1/2$		78×1		$79 \times 1/2$		79×1		$80 \times 1/2$		80×1		$81 \times 1/2$		81×1		$82 \times 1/2$		82×1		$83 \times 1/2$		83×1		$84 \times 1/2$		84×1		$85 \times 1/2$		85×1		$86 \times 1/2$		86×1		$87 \times 1/2$		87×1		$88 \times 1/2$		88×1		$89 \times 1/2$		89×1		$90 \times 1/2$		90×1		$91 \times 1/2$		91×1		$92 \times 1/2$		92×1		$93 \times 1/2$		93×1		$94 \times 1/2$		94×1		$95 \times 1/2$		95×1		$96 \times 1/2$		96×1		$97 \times 1/2$		97×1		$98 \times 1/2$		98×1		$99 \times 1/2$		99×1		$100 \times 1/2$		100×1	
$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$	$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right)$	$Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{8\pi}} \sin \theta \cos^2 \theta e^{i\phi}$	$Y_3^2 = \sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi}$	$Y_3^3 = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi}$	$Y_4^0 = \sqrt{\frac{9}{4\pi}} \left(\frac{7}{8} \cos^4 \theta - \frac{7}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \right)$	$Y_4^1 = -\sqrt{\frac{21}{8\pi}} \sin \theta \cos^3 \theta e^{i\phi}$	$Y_4^2 = \sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta e^{2i\phi}$	$Y_4^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos \theta e^{3i\phi}$	$Y_4^4 = \frac{3}{32} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^4 \theta e^{4i\phi}$	$Y_5^0 = \sqrt{\frac{11}{4\pi}} \left(\frac{35}{8} \cos^5 \theta - \frac{35}{4} \cos^3 \theta + \frac{7}{8} \cos \theta \right)$	$Y_5^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^4 \theta e^{i\phi}$	$Y_5^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta e^{2i\phi}$	$Y_5^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta e^{3i\phi}$	$Y_5^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos \theta e^{4i\phi}$	$Y_5^5 = \frac{3}{128} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^5 \theta e^{5i\phi}$	$Y_6^0 = \sqrt{\frac{13}{4\pi}} \left(\frac{63}{8} \cos^6 \theta - \frac{105}{4} \cos^4 \theta + \frac{45}{8} \cos^2 \theta - \frac{3}{8} \right)$	$Y_6^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^5 \theta e^{i\phi}$	$Y_6^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^4 \theta e^{2i\phi}$	$Y_6^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta e^{3i\phi}$	$Y_6^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta e^{4i\phi}$	$Y_6^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos \theta e^{5i\phi}$	$Y_6^6 = \frac{3}{2048} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^6 \theta e^{6i\phi}$	$Y_7^0 = \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \left(\frac{231}{8} \cos^7 \theta - \frac{105}{4} \cos^5 \theta + \frac{105}{8} \cos^3 \theta - \frac{35}{8} \cos \theta \right)$	$Y_7^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^6 \theta e^{i\phi}$	$Y_7^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^5 \theta e^{2i\phi}$	$Y_7^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^4 \theta e^{3i\phi}$	$Y_7^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^3 \theta e^{4i\phi}$	$Y_7^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^2 \theta e^{5i\phi}$	$Y_7^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos \theta e^{6i\phi}$	$Y_7^7 = \frac{3}{131072} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^7 \theta e^{7i\phi}$	$Y_8^0 = \sqrt{\frac{17}{4\pi}} \left(\frac{165}{8} \cos^8 \theta - \frac{105}{4} \cos^6 \theta + \frac{105}{8} \cos^4 \theta - \frac{35}{8} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \right)$	$Y_8^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^7 \theta e^{i\phi}$	$Y_8^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^6 \theta e^{2i\phi}$	$Y_8^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^5 \theta e^{3i\phi}$	$Y_8^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^4 \theta e^{4i\phi}$	$Y_8^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^3 \theta e^{5i\phi}$	$Y_8^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^2 \theta e^{6i\phi}$	$Y_8^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos \theta e^{7i\phi}$	$Y_8^8 = \frac{3}{524288} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^8 \theta e^{8i\phi}$	$Y_9^0 = \sqrt{\frac{19}{4\pi}} \left(\frac{6435}{512} \cos^9 \theta - \frac{105}{4} \cos^7 \theta + \frac{105}{8} \cos^5 \theta - \frac{35}{8} \cos^3 \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \right)$	$Y_9^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^8 \theta e^{i\phi}$	$Y_9^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^7 \theta e^{2i\phi}$	$Y_9^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^6 \theta e^{3i\phi}$	$Y_9^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^5 \theta e^{4i\phi}$	$Y_9^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^4 \theta e^{5i\phi}$	$Y_9^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^3 \theta e^{6i\phi}$	$Y_9^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^2 \theta e^{7i\phi}$	$Y_9^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos \theta e^{8i\phi}$	$Y_9^9 = \frac{3}{16777216} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^9 \theta e^{9i\phi}$	$Y_{10}^0 = \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \left(\frac{23025}{16384} \cos^{10} \theta - \frac{105}{4} \cos^8 \theta + \frac{105}{8} \cos^6 \theta - \frac{35}{8} \cos^4 \theta + \frac{3}{8} \cos^2 \theta - \frac{3}{8} \right)$	$Y_{10}^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^9 \theta e^{i\phi}$	$Y_{10}^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^8 \theta e^{2i\phi}$	$Y_{10}^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^7 \theta e^{3i\phi}$	$Y_{10}^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^6 \theta e^{4i\phi}$	$Y_{10}^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^5 \theta e^{5i\phi}$	$Y_{10}^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^4 \theta e^{6i\phi}$	$Y_{10}^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^3 \theta e^{7i\phi}$	$Y_{10}^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos^2 \theta e^{8i\phi}$	$Y_{10}^9 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^9 \theta \cos \theta e^{9i\phi}$	$Y_{10}^{10} = \frac{3}{268435456} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^{10} \theta e^{10i\phi}$	$Y_{11}^0 = \sqrt{\frac{23}{4\pi}} \left(\frac{461895}{262144} \cos^{11} \theta - \frac{105}{4} \cos^9 \theta + \frac{105}{8} \cos^7 \theta - \frac{35}{8} \cos^5 \theta + \frac{3}{8} \cos^3 \theta - \frac{3}{8} \cos \theta \right)$	$Y_{11}^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^{10} \theta e^{i\phi}$	$Y_{11}^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^9 \theta e^{2i\phi}$	$Y_{11}^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^8 \theta e^{3i\phi}$	$Y_{11}^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^7 \theta e^{4i\phi}$	$Y_{11}^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^6 \theta e^{5i\phi}$	$Y_{11}^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^5 \theta e^{6i\phi}$	$Y_{11}^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^4 \theta e^{7i\phi}$	$Y_{11}^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos^3 \theta e^{8i\phi}$	$Y_{11}^9 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^9 \theta \cos^2 \theta e^{9i\phi}$	$Y_{11}^{10} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{10} \theta \cos \theta e^{10i\phi}$	$Y_{11}^{11} = \frac{3}{4294967040} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^{11} \theta e^{11i\phi}$	$Y_{12}^0 = \sqrt{\frac{25}{4\pi}} \left(\frac{1105185}{16777216} \cos^{12} \theta - \frac{105}{4} \cos^{10} \theta + \frac{105}{8} \cos^8 \theta - \frac{35}{8} \cos^6 \theta + \frac{3}{8} \cos^4 \theta - \frac{3}{8} \cos^2 \theta + \frac{3}{8} \right)$	$Y_{12}^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^{11} \theta e^{i\phi}$	$Y_{12}^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^{10} \theta e^{2i\phi}$	$Y_{12}^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^9 \theta e^{3i\phi}$	$Y_{12}^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^8 \theta e^{4i\phi}$	$Y_{12}^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^7 \theta e^{5i\phi}$	$Y_{12}^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^6 \theta e^{6i\phi}$	$Y_{12}^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^5 \theta e^{7i\phi}$	$Y_{12}^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos^4 \theta e^{8i\phi}$	$Y_{12}^9 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^9 \theta \cos^3 \theta e^{9i\phi}$	$Y_{12}^{10} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{10} \theta \cos^2 \theta e^{10i\phi}$	$Y_{12}^{11} = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{11} \theta \cos \theta e^{11i\phi}$	$Y_{12}^{12} = \frac{3}{13959037440} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^{12} \theta e^{12i\phi}$	$Y_{13}^0 = \sqrt{\frac{27}{4\pi}} \left(\frac{1039545}{10737408} \cos^{13} \theta - \frac{105}{4} \cos^{11} \theta + \frac{105}{8} \cos^9 \theta - \frac{35}{8} \cos^7 \theta + \frac{3}{8} \cos^5 \theta - \frac{3}{8} \cos^3 \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \right)$	$Y_{13}^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^{12} \theta e^{i\phi}$	$Y_{13}^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^{11} \theta e^{2i\phi}$	$Y_{13}^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^{10} \theta e^{3i\phi}$	$Y_{13}^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^9 \theta e^{4i\phi}$	$Y_{13}^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^8 \theta e^{5i\phi}$	$Y_{13}^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^7 \theta e^{6i\phi}$	$Y_{13}^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^6 \theta e^{7i\phi}$	$Y_{13}^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos^5 \theta e^{8i\phi}$	$Y_{13}^9 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^9 \theta \cos^4 \theta e^{9i\phi}$	$Y_{13}^{10} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{10} \theta \cos^3 \theta e^{10i\phi}$	$Y_{13}^{11} = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{11} \theta \cos^2 \theta e^{11i\phi}$	$Y_{13}^{12} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{12} \theta \cos \theta e^{12i\phi}$	$Y_{13}^{13} = \frac{3}{21534460160} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^{13} \theta e^{13i\phi}$	$Y_{14}^0 = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \left(\frac{14721015}{70778752} \cos^{14} \theta - \frac{105}{4} \cos^{12} \theta + \frac{105}{8} \cos^{10} \theta - \frac{35}{8} \cos^8 \theta + \frac{3}{8} \cos^6 \theta - \frac{3}{8} \cos^4 \theta + \frac{3}{8} \cos^2 \theta - \frac{3}{8} \right)$	$Y_{14}^1 = -\sqrt{\frac{105}{64\pi}} \sin \theta \cos^{13} \theta e^{i\phi}$	$Y_{14}^2 = \sqrt{\frac{945}{2048\pi}} \sin^2 \theta \cos^{12} \theta e^{2i\phi}$	$Y_{14}^3 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^3 \theta \cos^{11} \theta e^{3i\phi}$	$Y_{14}^4 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^4 \theta \cos^{10} \theta e^{4i\phi}$	$Y_{14}^5 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^5 \theta \cos^9 \theta e^{5i\phi}$	$Y_{14}^6 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^6 \theta \cos^8 \theta e^{6i\phi}$	$Y_{14}^7 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^7 \theta \cos^7 \theta e^{7i\phi}$	$Y_{14}^8 = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^8 \theta \cos^6 \theta e^{8i\phi}$	$Y_{14}^9 = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^9 \theta \cos^5 \theta e^{9i\phi}$	$Y_{14}^{10} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{10} \theta \cos^4 \theta e^{10i\phi}$	$Y_{14}^{11} = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{11} \theta \cos^3 \theta e^{11i\phi}$	$Y_{14}^{12} = \sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{12} \theta \cos^2 \theta e^{12i\phi}$	$Y_{14}^{13} = -\sqrt{\frac{315}{128\pi}} \sin^{13} \theta \cos \theta e^{13i\phi}$	$Y_{14}^{14} = \frac{3}{34455137280} \sqrt{\frac{63}{\pi}} \sin^{14} \theta e^{14i\phi}$	$Y_{15}^0 = \sqrt{\frac{31}{4\pi}} \left(\frac{1039545}{10737408} \cos^{15} \theta - \frac{105}{4} \cos^{13} \theta + \frac{105}{8} \cos^{11} \theta - \frac{35}{8} \cos^9 \theta + \frac{3}{$																																																																																																																																																																																																																																																																																																

Esercizi

ES. 1

Un elettrone è a riposo in un campo magnetico oscillante

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t) \hat{k}, \quad (4)$$

dove B_0 e ω sono costanti.

- Scrivere l'Hamiltoniana del sistema
- A $t = 0$ l'elettrone si trova in uno stato di spin up rispetto all'asse x. Determinare $\chi(t)$ (funzione d'onda di spin) a tempi successivi.
N.B. $V(t)$ dipende dal tempo: $\chi(t)$ è dato dalla semplice formula per gli stati stazionari.
- Trovare la probabilità di ottenere $-\frac{\hbar}{2}$ misurando S_x .
- Qual è il campo minimo B_0 necessario per ottenere una rotazione completa in S_x ?

Soluzione

- a) $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ e, per l'elettrone $\boldsymbol{\mu} = -\frac{g_s e}{2m_e} \mathbf{S} = \gamma \mathbf{S}$, quindi

$$\begin{aligned} H &= -\gamma \mathbf{B} \mathbf{S} \\ &= -\gamma B_0 \cos(\omega t) S_z \\ &= -\gamma B_0 \cos(\omega t) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

- b) Sapendo che $H\chi(t) = i\hbar \frac{d\chi(t)}{dt}$ e definendo $\chi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ otteniamo

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \frac{\gamma\hbar}{2} B_0 \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha(t) = C_1 e^{i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \\ \beta(t) = C_2 e^{-i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)}, \end{cases} \quad (7)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti e possono essere determinate dalla condizione sullo stato iniziale (a $t = 0$ lo stato è di spin up rispetto a x, cioè $\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui $C_1 = C_2 = 1$). Concludiamo che

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \\ e^{-i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

c) La funzione d'onda di spin down rispetto all'asse x è $\chi_-^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P(t) &= |\langle \chi(t) | \chi_-^x \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} - e^{-i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \right) \right|^2 \\ &= \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

d) So che $P(t) = \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) \right)$ e posso ottenere $P = 1$ solo se $\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} (1 + 2k)$, quindi la condizione sul campo B_0 è

$$B_0 = \frac{\omega\pi}{\gamma} \frac{1 + 2k}{\sin(\omega t)}, \quad (10)$$

che ha valore minimo $B_0 = \frac{\omega\pi}{\gamma}$ (per $\sin(\omega t) = 1$ e $k = 0$).

ES. 2

L'elettrone di un atomo di idrogeno occupa lo stato

$$\Psi = R_{21} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10} \chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11} \chi_- \right), \quad (11)$$

con R_{nl} funzione radiale dell'atomo idrogenoide per i numeri quantici n e l , Y_{lm} armoniche sferiche e χ spin ((+) per spin \uparrow rispetto all'asse z, (-) per spin \downarrow rispetto allo stesso asse). Quali valori sarebbe possibile ottenere (e con quali probabilità P) se si misurasse

(a) L^2 (b) L_z (c) S^2 (d) S_z (e) J^2 (f) J_z ?

Soluzione

(a) $L = 1$, $\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$, $P=1$

(b) $L_z = 0$ con probabilità $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ e $L_z = 1\hbar$ con $P = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

(c) $S = \frac{1}{2}$, $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$, $P=1$

(d) $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{1}{3}$ e $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{2}{3}$

(e) Riscriviamo la funzione ψ nella base di $|J, M_J\rangle$.

$$\begin{aligned} R_{21}Y_{10}\chi_+ &= \left| \begin{matrix} n & L & S & M_L & M_S \\ 2 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle \\ &= c_1 \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle + c_2 \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

sapendo che $J = L \oplus S = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$ e $M_J = M_L + M_S = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Analogamente

$$\begin{aligned} R_{21}Y_{11}\chi_- &= \left| \begin{matrix} n & L & S & M_L & M_S \\ 2 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{matrix} \right\rangle \\ &= c_3 \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle + c_4 \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

con $J = L \oplus S = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$ e $M_J = M_L + M_S = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad c_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \quad c_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad c_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

La funzione d'onda nella base $|n, L, S, J, M_J\rangle$ si ottiene sostituendo quanto ottenuto nella 11:

$$\psi = \frac{1}{3} \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left| \begin{matrix} n & L & S & J & M_J \\ 2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{matrix} \right\rangle \quad (14)$$

e si vede che i valori possibili di J^2 sono $\frac{15}{4}\hbar^2$ ($J = \frac{3}{2}$) con $P = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ e $\frac{3}{4}\hbar^2$ ($J = \frac{1}{2}$) con $P = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(f) Per quanto visto nel punto precedente $J_z = \frac{1}{2}\hbar$ con $P = 1$.

ES. 3

Una particella di spin 1 e una di spin 2 sono a riposo in una configurazione tale che lo spin totale sia 3 e la sua componente lungo z sia 1.

Se si misura la componente z del momento angolare della particella di spin 2, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?

Soluzione

Dal momento che $S_z = s_{1z} + s_{2z}$, la condizione $S_z = 1$ (componente z dello spin totale) indica che le uniche possibilità per i valori (s_{1z}, s_{2z}) sono $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 2)$.

Scriviamo lo stato $\left| \begin{smallmatrix} S & S_z \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} \right\rangle$ nella base degli stati $|s_{1z} s_{2z}\rangle$ e otteniamo

$$\left| \begin{smallmatrix} S & S_z \\ 3 & 1 \end{smallmatrix} \right\rangle = c_1 \left| \begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle + c_2 \left| \begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\rangle + c_3 \left| \begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ -1 & 2 \end{smallmatrix} \right\rangle. \quad (15)$$

Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordon vedo che

$$c_1 = \sqrt{\frac{6}{15}} \quad c_2 = \sqrt{\frac{8}{15}} \quad c_3 = \sqrt{\frac{1}{15}}.$$

I possibili valori di s_{2z} sono 0 (con $P = c_1^2 = 6/15$), 1 (con $P = c_2^2 = 8/15$) e 2 (con $P = c_3^2 = 1/15$).