Momenti angolari, spin e coefficienti di Clebsch-Gordan

Cosa è importante ricordare/sapere...

MATRICI DI PAULI:

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Le matrici di Pauli sono Hermitiane (quindi rappresentano delle osservabili!) con le seguenti proprietà:

- sono matrici unitarie: $\sigma_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (con $i = x, y, z$)
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma_k$ (con ε^{ijk} tensore di Levi-Civita)
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbf{I}$ (con $\mathbf{I}$ matrice identità)
- $det\,(\sigma_i) = -1$ (determinante)
- $Tr\,(\sigma_i) = 0$ (traccia)

Le matrici di Pauli hanno due autovalori (± 1) e due autostati (χ_+^i e χ_-^i) ciascuno, che corrispondono alle condizioni di spin up (+1) e down (-1) rispetto agli assi x, y e z. Il generico stato di spin (spinore) può essere espresso come una combinazione lineare dei due autostati $\chi_\pm^i$. Ad esempio, se uno spinore è descritto dalla relazione $\chi = c_1\chi_+^{(x)} + c_2\chi_-^{(x)}$, effettuando una misura della componente x dello spin, la probabilità di ottenere *spin up* sarà $|c_1|^2$.
In particolare gli autostati delle matrici di Pauli normalizzati sono:

$\chi_+^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_-^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\chi_+^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \chi_-^{(y)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
$\chi_+^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_-^{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

COEFFICIENTI DI CLEBSCH-GORDAN:

I coefficienti di Clebsch-Gordan sono un utile strumento per trattare la composizione (somma) di momenti angolari, siano questi momenti angolari orbitali, momenti angolari di spin o l'accoppiamento spin-orbita.
In particolare questi coefficienti permettono di "passare" da una base all'altra nella composizione di momenti angolari. La prima base in questione è quella

che diagonalizza contemporaneamente gli operatori $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_{1z}, \hat{j}_{2z}$ (con j_i *i*-esimo momento angolare e j_{iz} la relativa componente z) e si indentificano con i vettori $|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle$.

Ad es. nel caso della composizione di momenti angolari orbitali la base sarà costituita da vettori del tipo $|l_1, l_2, m_1, m_2\rangle$*, nel caso di accoppiamento spin-orbita da* $|l, s, m, m_s\rangle$.

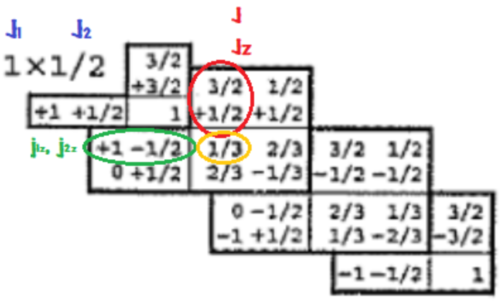
Nella seconda base gli operatori $\hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ sono diagonali (dove $\hat{J}$ è l'operatore di momento angolare totale) e la base è definita dagli stati $|j_1, j_2, J, J_z\rangle$.

Nel caso di composizione di momenti angolari orbitali avremo stati del tipo $|l_1, l_2, J, J_z\rangle$ *mentre, nel caso di accoppiamento spin-orbita* $|l, s, J, J_z\rangle$.

E' ovviamente possibile esprimere un elemento di una delle due basi come combinazione lineare degli stati dell'altra e viceversa, secondo le relazioni

$$\begin{aligned} |j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle &= \sum_{J,J_z} \langle j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}|j_1, j_2, J, J_z\rangle\, |j_1, j_2, J, J_z\rangle \\ |j_1, j_2, J, J_z\rangle &= \sum_{j_{1z},j_{2z}} \langle j_1, j_2, J, J_z|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle\, |j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\langle j_1, j_2, J, J_z|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle = \langle j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}|j_1, j_2, J, J_z\rangle^*$ sono i *coefficienti di Clebsch-Gordan*. Questi coefficienti sono tabulati in tabelle di questo tipo:

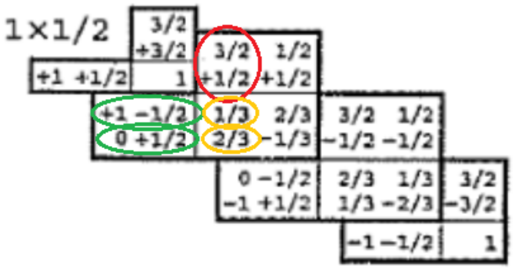


I due numeri a sinistra (in questo caso 1x1/2) rappresentano i due momenti angolari coinvolti nella somma (quindi j_1 e j_2), le colonne in alto (cerchio rosso) contengono tutti i possibili valori di $J = |j_1 - j_2| ... j_1 + j_2$ e, per ogni J, tutti i possibili valori di $J_z = -J... + J$. Le righe (cerchio verde) indicano le componenti z dei momenti angolari coinvolti nella somma (j_{1z} e j_{2z}).
Una volta scelti i valori di J, J_z, j_{1z}, j_{2z}, il corrispettivo coefficiente di Clebsch-Gordan si trova all'incrocio tra la riga e la colonna considerata (cerchio giallo).

Da notare che nei coefficienti indicati in tabella è sempre sottointesa una radice quadrata, cioè se in tabella è indicato il valore $2/3$, il coefficiente è in realtà $\sqrt{2/3}$, se il valore è $-1/3$ in coefficiente sarà $-\sqrt{1/3}$.

Esempi:

1. Esprimere lo stato $|j_1, j_2, J, J_z\rangle = \left|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ nella base $|j_1, j_2, j_{1z}, j_{2z}\rangle$.



$$\left|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3}}}_{c_1}\left|1, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right\rangle + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}}_{c_2}\left|1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\rangle \tag{2}$$

2. Effettuando una misura su j_{1z} dello stato $|j_1, j_2, J, J_z\rangle = \left|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$, qual è la probabilità di ottenere $j_{1z} = 0$? E $j_{2z} = 0$?

$$\begin{aligned} P(j_{1z} = 0) &= |c_2|^2 = \frac{2}{3} \\ P(j_{2z} = 0) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$P(j_{2z} = 0) = 0$ dal momento che gli unici valori possibili sono $j_{2z} = \pm\frac{1}{2}$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			

1/2×1/2

m_1 m_2	1
	+1
+1/2 +1/2	1

m_1 m_2	1	0
	0	0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	1
	−1
−1/2 −1/2	1

1×1/2

m_1 m_2	3/2
	+3/2
+1 +1/2	1

m_1 m_2	3/2	1/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

m_1 m_2	3/2	1/2
	−1/2	−1/2
0 −1/2	2/3	1/3
−1 +1/2	1/3	−2/3

m_1 m_2	3/2
	−3/2
−1 −1/2	1

2×1

m_1 m_2	3
	+3
+2 +1	1

m_1 m_2	3	2
	+2	+2
+2 0	1/3	2/3
+1 +1	2/3	−1/3

m_1 m_2	3	2	1
	+1	+1	+1
+2 −1	1/15	1/3	3/5
+1 0	8/15	1/6	−3/10
0 +1	2/5	−1/2	1/10

m_1 m_2	3	2	1
	0	0	0
+1 −1	1/5	1/2	3/10
0 0	3/5	0	−2/5
−1 +1	1/5	−1/2	3/10

m_1 m_2	3	2	1
	−1	−1	−1
0 −1	2/5	1/2	1/10
−1 0	8/15	−1/6	−3/10
−2 +1	1/15	−1/3	3/5

m_1 m_2	3	2
	−2	−2
−1 −1	2/3	1/3
−2 0	1/3	−2/3

m_1 m_2	3
	−3
−2 −1	1

1×1

m_1 m_2	2
	+2
+1 +1	1

m_1 m_2	2	1
	+1	+1
+1 0	1/2	1/2
0 +1	1/2	−1/2

m_1 m_2	2	1	0
	0	0	0
+1 −1	1/6	1/2	1/3
0 0	2/3	0	−1/3
−1 +1	1/6	−1/2	1/3

m_1 m_2	2	1
	−1	−1
0 −1	1/2	1/2
−1 0	1/2	−1/2

m_1 m_2	2
	−2
−1 −1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

3/2×1

m_1 m_2	5/2
	+5/2
+3/2 +1	1

m_1 m_2	5/2	3/2
	+3/2	+3/2
+3/2 0	2/5	3/5
+1/2 +1	3/5	−2/5

m_1 m_2	5/2	3/2	1/2
	+1/2	+1/2	+1/2
+3/2 −1	1/10	2/5	1/2
+1/2 0	3/5	1/15	−1/3
−1/2 +1	3/10	−8/15	1/6

m_1 m_2	5/2	3/2	1/2
	−1/2	−1/2	−1/2
+1/2 −1	3/10	8/15	1/6
−1/2 0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2 +1	1/10	−2/5	1/2

m_1 m_2	5/2	3/2
	−3/2	−3/2
−1/2 −1	3/5	2/5
−3/2 0	2/5	−3/5

m_1 m_2	5/2
	−5/2
−3/2 −1	1

2×1/2

m_1 m_2	5/2
	+5/2
+2 +1/2	1

m_1 m_2	5/2	3/2
	+3/2	+3/2
+2 −1/2	1/5	4/5
+1 +1/2	4/5	−1/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	2/5	3/5
0 +1/2	3/5	−2/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	−1/2	−1/2
0 −1/2	3/5	2/5
−1 +1/2	2/5	−3/5

m_1 m_2	5/2	3/2
	−3/2	−3/2
−1 −1/2	4/5	1/5
−2 +1/2	1/5	−4/5

m_1 m_2	5/2
	−5/2
−2 −1/2	1

3/2×1/2

m_1 m_2	2
	+2
+3/2 +1/2	1

m_1 m_2	2	1
	+1	+1
+3/2 −1/2	1/4	3/4
+1/2 +1/2	3/4	−1/4

m_1 m_2	2	1
	0	0
+1/2 −1/2	1/2	1/2
−1/2 +1/2	1/2	−1/2

m_1 m_2	2	1
	−1	−1
−1/2 −1/2	3/4	1/4
−3/2 +1/2	1/4	−3/4

m_1 m_2	2
	−2
−3/2 −1/2	1

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

Esercizi

ES. 1

Un elettrone è a riposo in un campo magnetico oscillate

$$\mathbf{B} = B_0 cos(\omega t)\hat{k}, \tag{4}$$

dove B_0 e ω sono costanti.

a) Scrivere l'Hamiltoniana del sistema

b) A $t = 0$ l'elettrone si trova in uno stato di spin up rispetto all'asse x. Determinare $\chi(t)$ (funzione d'onda di spin) a tempi successivi.
N.B. V(t) dipende dal tempo: $\chi(t)$ è dato dalla semplice formula per gli stati stazionari.

c) Trovare la probabilità di ottenere $-\frac{\hbar}{2}$ misurando S_x.

d) Qual è il campo minimo B_0 necessario per ottenere una rotazione completa in S_x?

Soluzione

a) $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ e, per l'elettrone $\boldsymbol{\mu} = -\frac{g_s e}{2m_e}\mathbf{S} = \gamma \mathbf{S}$, quindi

$$\begin{aligned} H &= -\gamma \mathbf{B}\mathbf{S} \\ &= -\gamma B_0 cos(\omega t) S_z \\ &= -\gamma B_0 cos(\omega t) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

b) Sapendo che $H\chi(t) = i\hbar \frac{\mathrm{d}\chi(t)}{\mathrm{d}t}$ e definendo $\chi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$ otteniamo

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \frac{\gamma\hbar}{2} B_0 cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha(t) = C_1 e^{i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \\ \beta(t) = C_2 e^{-i\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)}, \end{cases} \tag{7}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti e possono essere determinate dalla condizione sullo stato iniziale (a $t = 0$ lo stato è di spin up rispetto a x, cioè $\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da cui $C_1 = C_2 = 1$). Concludiamo che

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i \frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \\ e^{-i \frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

c) La funzione d'onda di spin down rispetto all'asse x è $\chi_-^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P(t) = \left| \langle \chi(t) | \chi_-^x \rangle \right|^2 &= \left| \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} - e^{-i \frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t)} \right) \right|^2 \\ &= \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) \right) \end{aligned} \tag{9}$$

d) So che $P(t) = \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) \right)$ e posso ottenere $P = 1$ solo se $\frac{\gamma}{2\omega} B_0 \sin(\omega t) = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(1 + 2k)$, quindi la condizione sul campo B_0 è

$$B_0 = \frac{\omega \pi}{\gamma} \frac{1 + 2k}{\sin(\omega t)}, \tag{10}$$

che ha valore minimo $B_0 = \frac{\omega \pi}{\gamma}$ (per $\sin(\omega t) = 1$ e $k = 0$).

ES. 2

L'elettrone di un atomo di idrogeno occupa lo stato

$$\Psi = R_{21} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10} \chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11} \chi_- \right), \tag{11}$$

con R_{nl} funzione radiale dell'atomo idrogenoide per i numeri quantici n e l, Y_{lm} armoniche sferiche e χ spin ((+) per spin $\uparrow$ rispetto all'asse z, (-) per spin $\downarrow$ rispetto allo stesso asse). Quali valori sarebbe possibile ottenere (e con quali probabilità P) se si misurasse
(a) L^2 (b) L_z (c) S^2 (d) S_z (e) J^2 (f) J_z ?

Soluzione

(a) $L = 1$, $\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$, P=1

(b) $L_z = 0$ con probabilità $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ e $L_z = 1\hbar$ con $P = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

(c) $S = \frac{1}{2}$, $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$, P=1

(d) $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{1}{3}$ e $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{2}{3}$

(e) Riscriviamo la funzione ψ nella base di $|J,\, M_J\rangle$.

$$\begin{aligned} R_{21}Y_{10}\chi_+ &= \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{M_L}{0}, \overset{M_s}{1/2}\right\rangle \\ &= c_1 \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{3/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle + c_2 \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{1/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

sapendo che $J = L \oplus S = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$ e $M_J = M_L + M_S = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Analogamente

$$\begin{aligned} R_{21}Y_{11}\chi_- &= \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{M_L}{1}, \overset{M_s}{-1/2}\right\rangle \\ &= c_3 \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{3/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle + c_4 \left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{1/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle, \end{aligned} \tag{13}$$

con $J = L \oplus S = \begin{cases} 3/2 \\ 1/2 \end{cases}$ e $M_J = M_L + M_S = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordan:
$c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad c_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad c_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad c_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
La funzione d'onda nella base $|n, L, S, J, M_J\rangle$ si ottiene sostituendo quanto ottenuto nella 11:

$$\psi = \frac{1}{3}\left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{1/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left|\overset{n}{2}, \overset{L}{1}, \overset{S}{1/2}, \overset{J}{3/2}, \overset{M_J}{1/2}\right\rangle \tag{14}$$

e si vede che i valori possibili di J^2 sono $\frac{15}{4}\hbar^2$ ($J = \frac{3}{2}$) con $P = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ e $\frac{3}{4}\hbar^2$ ($J = \frac{1}{2}$) con $P = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

(f) Per quanto visto nel punto precedente $J_z = \frac{1}{2}\hbar$ con $P = 1$.

ES. 3

Una particella di spin 1 e una di spin 2 sono a riposo in una configurazione tale che lo spin totale sia 3 e la sua componente lungo z sia 1.
Se si musura la componente z del momento angolare della particella di spin 2, quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?

Soluzione

Dal momento che $S_z = s_{1z} + s_{2z}$, la condizione $S_z = 1$ (componente z dello spin totale) indica che le uniche possibilità per i valori (s_{1z}, s_{2z}) sono $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 2)$.
Scriviamo lo stato $\left|\begin{smallmatrix} S & S_z \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right\rangle$ nella base degli stati $|s_{1z}\, s_{2z}\rangle$ e otteniamo

$$\left|\begin{smallmatrix} S & S_z \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right\rangle = c_1 \left|\begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right\rangle + c_2 \left|\begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right\rangle + c_3 \left|\begin{smallmatrix} s_{1z} & s_{2z} \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right\rangle . \tag{15}$$

Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordon vedo che
$c_1 = \sqrt{\frac{6}{15}} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{8}{15}} \qquad c_3 = \sqrt{\frac{1}{15}}$.
I possibili valori di s_{2z} sono 0 (con $P = c_1^2 = 6/15$), 1 (con $P = c_2^2 = 8/15$) e 2 (con $P = c_3^2 = 1/15$).