SOLUZIONI DI EQUILIBRIO, STABILITA' E PICCOLE OSCILLAZIONI

Consideriamo sist. con vincoli indip dal t

Eq. Lagr. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_\ell} - \frac{\partial T}{\partial q_\ell} = Q_\ell$ può essere scritta come

$$\sum_k a_{\ell k}\, \ddot q_k + g_\ell(\bar q, \dot{\bar q}) = Q_\ell$$

$$\sum_k a_{\ell k}\, \ddot q_k = Q_\ell - g_\ell$$

$$\mathcal{A}\cdot \ddot{\bar q} = \bar Q - \bar g$$

matrice INVERTIBILE $\Rightarrow$ $\ddot{\bar q} = \underline{\mathcal{A}^{-1}(\bar Q - \bar g)} = \underline{\bar f(\bar q, \dot{\bar q})}$

eq. diff. del 2° ordine in forma normale

$$\ddot q_h = f_h(\bar q, \dot{\bar q}) \longleftrightarrow \begin{cases} \dot q_h = \eta_h \\ \dot\eta_h = f_h(\bar q, \bar\eta) \end{cases} (*)$$

Eq. di Lagrange

eq. diff. del 1° ordine (in forma normale)

$$\Updownarrow$$

$$\dot{\bar x} = \bar f(\bar x) \qquad \bar x = \begin{pmatrix} \bar q \\ \bar\eta \end{pmatrix} \qquad \bar f = \begin{pmatrix} \bar\eta \\ \bar f \end{pmatrix}$$

Def. $\bar q^*$ è una CONFIGURAZIONE (o pto) di EQUILIBRIO per le eq. di Lagrange se $\bar c \equiv (\bar q^*, 0)$ è pto di eq. per il sistema $(*)$, ovvero se $f_h(\bar q^*, 0) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

Prop. Pto $\bar q^*$ è di EQUIL. per le eq. di Lagr. $\Longleftrightarrow$ $Q_h(\bar q^*, 0) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

Dim

$$\bar f = \mathcal{A}^{-1}(\bar Q - \bar g), \quad g_h = \sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_h}\right)\dot q_j \dot q_k \Big|_{(\bar q^*, 0)} = 0 \;;$$

fine lezione 8 (e togliere dip. espl. da t)

$\dot{\bar q} = \bar\eta = 0$

quindi $\bar{f}(\bar{q}^*, 0) = 0 \iff \underset{\text{matrice invertibile}}{a^{-1}} \bar{Q}\big|_{(\bar{q}^*,0)} = 0 \iff \bar{Q}(\bar{q}^*, 0) = 0$ //

Se le forze sono posiz., conserv., $Q_h = -\dfrac{\partial V}{\partial q_h}$

Prop. Config. $\bar{q}^*$ è di equil. $\iff \dfrac{\partial V}{\partial q_h}(\bar{q}^*) = 0 \quad h = 1, \dots, n$

(cioè $\bar{q}^*$ è pto staz. per V)

Def. $\bar{q}^*$ è config. di equil. STABILE se $\bar{c} \equiv (\bar{q}^*, 0)$ è stabile per il sistema $(\star)$.

↳ comunque si prende intorno U di $\bar{p}^*$ e comunque si fissi $\epsilon > 0$, $\exists$ intorno V di $\bar{q}^*$ e $\exists \delta > 0$ t.c. ogni moto con dato iniziale $(\bar{q}^0, \dot{\bar{q}}^0)$ con $\bar{p}^0 \in V$ e $T(\bar{p}^0, \dot{\bar{p}}^0) < \delta$ resta indefinitam. in U con en. cin. $T(\bar{q}, \dot{\bar{p}}) < \epsilon$

Teorema di Lagrange-Dirichlet. Sia dato sist. Lagr., con

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q}) \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(\bar{q})\, \dot{q}_h \dot{q}_k .$$

Se l'en. pot. V ha un MINIMO STRETTO in $\bar{q}^*$, allora $\bar{q}^*$ è pto di equil. stabile.

Dim. Se $\bar{q}^*$ è min. di $V \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial q_h}\Big|_{\bar{q}^*} = 0 \quad h = 1, \dots, n \Rightarrow \bar{q}^*$ è di EQUIL.

L'energia $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}, \dot{\bar{p}}) + V(\bar{q})$ è una buona funz. di Ljapunov:

- in un intorno di $\bar{c} = (\bar{p}^*, 0)$ risulta $E > E_0 = V(\bar{p}^*)$;
- $E(\bar{p}, \dot{\bar{p}})$ è una cost. del moto $\to \mathcal{L}_{\bar{f}} E = 0$ //

- Teorema di LD si estende ai casi più comuni di forze dip. da velocità (es. Forza di Coriolis):

$$V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \qquad (V_1 \text{ lineare in } \dot{\bar{q}});$$

la dim. di LD rimane valida, se prendiamo come funz. di Ljapunov $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \equiv T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) + V_0(\bar{q})$

($\bar{q}^*$ è min. per $V_0(\bar{q})$).

- Se ci sono forze dissipative, allora la stabilità permane, ma solo per tempi positivi.

LINEARIZZAZIONE

(↳ riferito alle equaz. diff. che vengono approssimate da eq. diff. LINEARI)

Vogliamo studiare le soluz. delle eq. di Lag. attorno a punti di equilibrio stabili ($q_\ell(t) - q_\ell^* \ll 1$ $\dot{q}_\ell(t) \ll 1$ durante tutto il moto)

in opportune unità di mis.

ci permetterà di trascurare potenze alte di $\|\bar{q} - \bar{q}^*\|$ e $\|\dot{\bar{q}}\|$.

$$L = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) - V(\bar{q}) \qquad T = \frac{1}{2} \sum_{h,m} a_{hm}(\bar{q}) \dot{q}_h \dot{q}_m$$

Supponiamo che $(\bar{q}^*, 0)$ sia pto eq. . Per semplicità ridefiniamo le coordinate in modo che pto di equil. sta in $\underline{\bar{q} = 0}$

$$\left(\bar{q} = \bar{q} + \bar{q}^* \qquad \bar{q} - \bar{q}^* \mapsto \bar{q} \quad \leadsto \quad \underline{\|\bar{q}\| \ll 1 \quad \|\dot{\bar{q}}\| \ll 1} \right)$$

In queste coord., il pto di equil. è in $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (0, 0)$.

$L = T(\bar{q},\dot{\bar{q}}) - V(\bar{q})$ espandiamo attorno $(0,0)$

$T = \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(\bar{q})\dot{q}_h\dot{q}_k$ $L: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$

$$L = L(0,0) + \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m}(0,0)\cdot q_m + \sum_m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}(0,0)\dot{q}_m +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{m,k}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial \dot{q}_k}(0,0)\cdot q_m\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial q_m \partial q_k}(0,0)\, q_m q_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_k}(0)\,\dot{q}_m\dot{q}_k\right)$$

$$+ O(q^3, q^2\dot{q}, q\dot{q}^2, \dot{q}^3)$$

$$L = \underbrace{-\cancel{V(0)}}_{\text{ininfluente}} - \sum_h \cancel{\frac{\partial V(0)}{\partial q_h}}^{=0} q_h$$

perchè $\bar{q}=0$ è pto equil.

$$+ \frac{1}{2}\sum_{hk} a_{hk}(0)\,\dot{q}_h\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{h,k}\frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_h \partial q_k} q_h q_k + \cancel{\ldots}$$

termini cubici in q e $\dot{q}$ e quindi più piccoli dei precedenti per $\|q\| \ll 1$, $\|\dot{\bar{q}}\| \ll 1$.

Otteniamo una Lag. approssimata, che è valida per descrivere la dinamica dei moti attorno al pto di equil.:

$$\hat{L} = \frac{1}{2}\sum_{h,k}\underbrace{a_{hk}(0)}_{A_{hk}}\dot{q}_h\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{hk}\underbrace{\frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_h \partial q_k}}_{B_{hk}} q_h q_k = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}\cdot A\dot{\bar{q}} - \frac{1}{2}\bar{q}\cdot B\bar{q}$$

Eq. di Lag. (buona appross. vicino pto equil.)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}_l} = \frac{d}{dt}\left(\sum_h A_{lh}\dot{q}_h\right) = \sum_h A_{lh}\ddot{q}_h$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_l} = -\sum_h B_{lh} q_h$$

$$A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = 0 \quad (*)$$

$$\leadsto \sum_h (A_{lh}\ddot{q}_h + B_{lh} q_h) = 0$$

$\Rightarrow$ Eq. di Lagr. di $\hat{\mathcal{L}}$ sono EQ. DIFF. LINEARI

- Avremmo ottenuto le stesse eq. lin., scrivendo le eq. di Lagr. delle Lagr. di partenza L e linearizzandole

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}) \end{cases}$$ linearizziamo $\bar{f}$ $\leadsto$ LINEARIZZATE danno (*)

Risolviamo $A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = 0$. $\to$ LINEARE: soluz. gen. è comb. lineare di $2n$ soluz. particol.

Cerchiamo soluz. partic. della forma

$$\bar{q}(t) = \tau(t)\,\bar{u} \qquad \bar{u} \in \mathbb{R}^n$$

in eq. (*)

$$\ddot{\tau}(t) A\bar{u} + \tau(t) B\bar{u} = 0$$

$\to$ possibile se e solo se $A\bar{u}$ e $B\bar{u}$ sono vettori paralleli,

cioè se $B\bar{u} = \lambda A\bar{u}$ (‡)

$$\ddot{\tau} = -\lambda\tau$$

↳ due soluz. indip.

$2n$ indip. di (*) $\leadsto$ cercare n soluz. $\bar{u}^{(i)}$ $i=1,\dots,n$ indip. di (‡) $\to$

$\to$ eq. agli autovalori per B data da

$$\det(B - \lambda A) = 0$$ $\leadsto$ mi danno valori di λ_i

A è una matrice sim. e def. pos. $\Rightarrow \exists$ matrice $\tilde{U}$ (invert.) t.c. $\tilde{U}^T A \tilde{U} = \mathbb{1}$

$$B\bar{u} = \lambda A\bar{u} \iff \tilde{U}^T B \tilde{U}\tilde{U}^{-1}\bar{u} = \lambda \tilde{U}^T A \tilde{U}\tilde{U}^{-1}\bar{u} \iff$$

$$\iff (\tilde{U}^T B \tilde{U})\,\bar{w} = \lambda\bar{w} \qquad \bar{w} = \tilde{U}^{-1}\bar{u}$$

Diagonalizzo la matrice $\tilde{U}^T B \tilde{U}$ (simmetrica) con una matrice ortogonale O (cioè t.c. $O^T O = \mathbb{1} = O O^T$)

$$\rightsquigarrow \quad O^T \tilde{U}^T B \tilde{U} O = B_{diag.} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U \equiv \tilde{U} O \qquad (U^T = O^T \tilde{U}^T)$$

ho ottenuto una matrice U t.c. $U^T B U = B_{diag.}$

ed è t.c. $U^T A U = O^T \tilde{U}^T A \tilde{U} O = O^T \mathbb{1} O = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow U^{-T} = A U$$

$$B U = U^{-T} U^T B U = U^{-T} B_{diag.} = A U B_{diag.}$$

$$B \cdot U = A \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = (\bar{u}^{(1)} \; \bar{u}^{(2)} \dots \bar{u}^{(n)})$$

colonne di matrice U

$$(B \bar{u}^{(1)} \; B \bar{u}^{(2)} \dots B \bar{u}^{(n)}) = (\lambda_1 A \bar{u}^{(1)} \; \lambda_2 A \bar{u}^{(2)} \dots \lambda_n A \bar{u}^{(n)})$$

$$\Longrightarrow \quad B \bar{u}^{(i)} = \lambda_i A \bar{u}^{(i)}$$

cioè le colonne di U sono gli autovett. di B rispetto autovalori λ_i.

B simm. $\rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$

Se B è def. pos. $\Rightarrow \lambda_i > 0$

Autovettori $\quad u_j^{(i)} = U_{ji}$

elem. j-esimo del vett. i-esimo

MODI NORMALI DI OSCILLAZ.

Ci restringiamo a caso interess. : EQ. STABILE ($\bar{q}^*$ è min di V)

$\Rightarrow B \quad \left(B_{hk} = \dfrac{\partial^2 V(\bar{q}^*)}{\partial q_h \partial q_k} \right)$ è DEFINITA POSITIVA

$\rightarrow \quad \lambda_i \equiv \omega_i^2 > 0 \qquad i = 1, \dots, n$

Eq. per $\tau(t)$ è l'eq. dell'osc. armonico $\ddot{\tau}(t) = -\omega_i^2 \tau(t)$

$\tau_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \longleftrightarrow$ corrisp. a un $\bar{u}^{(i)}$

Soluz. generale di eq. (*)

$$\bar{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)\, \bar{u}^{(i)}$$

combinaz. lineare delle soluz. particolari trovate

Sottocaso $A_k = 1 \qquad A_{i \neq k} = 0$

$$q_h(t) = U_{hk} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \Leftrightarrow \bar{q}(t) = \cos(\omega_k t + \varphi)\, \bar{u}^{(k)}$$

$\rightsquigarrow$ soluz. PERIODICHE (armoniche) di UGUAL PERIODO e FASE per tutte le $q_h(t)$, dette MODI NORMALI di OSCILLAZIONE

Soluz. gen. è comb. lin. di modi norm. di osc.

FREQ. ω_i dei MODI NORMALI sono dette FREQUENZE delle PICCOLE OSCILLAZIONI e sono SOLUZIONI di eq. $\det(B - \lambda A) = 0$.

$$\hat{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{q}} \cdot A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2}\, \bar{q} \cdot B \bar{q}$$

$\downarrow$ facciamo cambio di coord.

$$\bar{q} = U \bar{x}$$

$$\hat{L}' = \hat{L}(U\dot{\bar{x}}, U\bar{x}) = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{x}} \cdot \overbrace{U^T A U}^{\mathbb{1}} \dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\, \bar{x} \cdot \overbrace{U^T B U}^{B_{diag}} \bar{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

ep. stab. $\lambda_i = \omega_i^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\dot{x}_i^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 x_i^2 \right] \quad (*)$$

x_i sono dette COORDINATE NORMALI

somma di n oscillatori armonici disaccoppiati!

n Ep. di Lag. disaccop. nelle x_i (qui ep. di Lag. è l'ep. dell'osc. armonico in una x_i)

In partic. $(*) \Rightarrow \exists$ n cost. del moto $E_i = \frac{1}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}\omega_i^2 x_i^2$

⇒ Qualunque sistema Lagrangiano, linearizzato attorno a un pto di equil. stabile è equivalente (tramite una trasf. lineare di coord.) a un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati.

Linearizzazione e stabilità

Dall'ep. disaccopp. lin. si vede per il problema linearizzato da l'origine è pto di equil. stab. se $\lambda_i > 0 \; \forall i$ mentre è INSTAB. se $\exists i$ t.c. $\lambda_i \leq 0$

Le proprietà di stab. dell'ep. per il sist. linearizzato NON si trasportano sempre a sist. originale non-lineare. Ciò può avvenire per sist. Lag. conservat.:

- se $\lambda_i > 0 \; \forall i \rightarrow$ pt ep. stab. anche per sist. non-lin.
- se $\exists \lambda_i < 0 \Rightarrow$ pt ep. inst. " " " ".

Se almeno un $\lambda = 0$ e gli altri sono > 0, non si può concludere nulla nel sist. non-lin. di partenza.