Integrale sui cammini [S.14.5]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A^\mu \qquad J_\mu : \text{corrente}$$

E.o.m nello spazio dei momenti:

$$(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A_\nu(k) = J_\mu$$

$\Rightarrow$ Non possiamo invertirla perché $\det(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) = 0$

Ha un autovettore k_ν con autovalore 0 : $(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) k_\nu = 0$

Ovvero: non possiamo risolvere per A_μ in termine di J_μ perché abbiamo una ridondanza $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Molti vettori A_μ corrispondono alla stessa corrente J_μ.

La soluzione è rimuovere la ridondanza

FISSANDO LA GAUGE aggiungendo $\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$

$\Rightarrow$ Elementi di matrice di operatori gauge-invarianti sono indipendenti da ξ.

$$\langle 0| T\{ O(x_1 \ldots x_n)\} |0\rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\varphi^* \, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[A,\varphi]} \, O(x_1, \ldots, x_n)$$

Vogliamo fattorizzare dall'integrale sui cammini la parte di gauge $(\pi(x))$ in $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \pi(x)$

Metodo di Faddeev & Popov

L'obiettivo sarà avere $\partial_\mu A_\mu = 0$:

$\partial_\mu A_\mu \to \partial_\mu A_\mu + \Box\alpha \Rightarrow$ scegliamo $\alpha = \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu$

Consideriamo
$$f(\xi) \equiv \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi)^2}$$

Facciamo un cambio di variabili:

è solo una traslazione

$$\pi(x) \to \pi(x) - \alpha(x) = \pi(x) - \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu \quad ; \quad D\pi \to D\pi$$

$$f(\xi) = \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2} \leftarrow$$ è $\underline{\text{indipendente}}$ da A_μ come la $f(\xi)$ iniziale

Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale sui cammini per $f(\xi)$:

operatore gauge-invariante

$$\langle 0|T\{O(x_1 \dots x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]f(\xi)}\int DA\,D\varphi\,D\varphi^*\,D\pi\,O(\dots)\,e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Adesso facciamo una trasformazione di gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\pi$

$$\mathcal{L}[A_\mu,\varphi] \to \mathcal{L}[A_\mu,\varphi] \quad ; \quad DA\,D\varphi\,D\varphi^*\,D\pi \to DA\,D\varphi\,D\varphi^*\,D\pi$$

$$\langle 0|T\{O(x_1 \dots x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left(\underbrace{\frac{\int D\pi}{f(\xi)}}_{\text{entra anche in } Z[0]}\right)\int DA\,D\varphi\,D\varphi^*\,O(\dots)\,e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\int DA\,D\varphi\,D\varphi^*\,O(\dots)\,e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Ma l'espressione iniziale è indipendente da ξ, quindi anche le funzioni di correlazione di OPERATORI GAUGE-INVARIANTI lo sono.

[S.8.5]

$$\mathcal{L}^{free}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2}A_\mu\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu$$

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \, \exp\left\{ i\int d^4x \left[\frac{1}{2}A_\mu\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu + i\varepsilon A_\mu A_\mu + J_\mu A_\nu \right]\right.$$

$$= Z[0]\, \exp\left\{ -\int d^4x\, d^4y \, \frac{1}{2} J_\mu(x)\, i\Pi^{\mu\nu}(x-y)\, J_\nu(y)\right\}$$

Dove:

$$\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \delta(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad i\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{-i}{p^2+i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p^\mu p^\mu}{p^2}\right)$$

PROPAGATORE DEL FOTONE NELLA ξ-GAUGE

ESERCIZIO: Verificare

$$\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\right)Z[J] = i\Pi_{\mu\nu}(x-y)$$

- FEYNMAN - 't Hooft gauge: $\xi = 1$
- Lorenz gauge: $\xi = 0$
- Unitary gauge: $\xi \to \infty$