

MECCANICA RAZIONALE

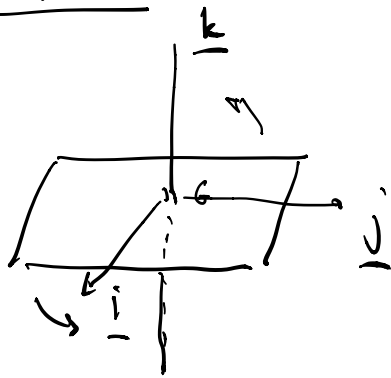
- LEZIONE DEL 17 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

- Rigido con axe fisso
- Precessioni & moto libero di un corpo rigido

Esempi di rigido con axe fisso

Esempio 1



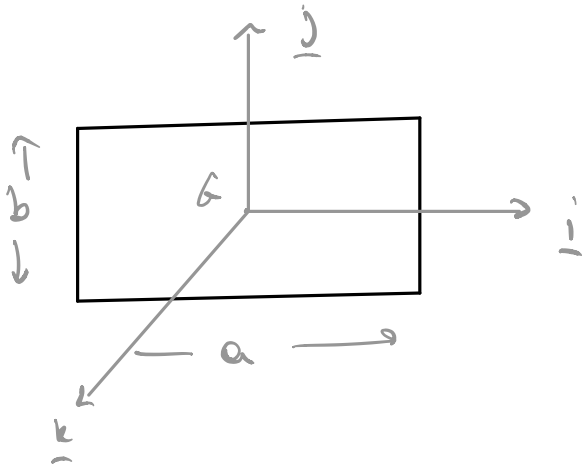
lamina rettangolare omogenea
cerviera cilindrica in G
con un axe di rotazione
verticale (per G ed e^-
ortogonale al piano della
laminella). Vincoli lisci

Dalle equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \underline{R}^e = M \underline{g} + \underline{F}_G = \underline{\dot{P}} = \underline{0} & \text{perché } G \text{ è fisso} \\ \underline{M}^e(G) = \underline{J}_G \cdot \underline{\ddot{\theta}} = \frac{d}{dt} \underline{L}(G) \end{cases}$$

↑ perché il momento della forza peso rispetto a G è nullo

Velocità angolare $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$



Si sceglie la lancia
e' sul piano $(\underline{i}, \underline{j})$
→ $\underline{k}$ è asse principale
di inerzia

$$\underline{L}(G) = I_G(\underline{\omega}) = \omega J_3 \underline{k}$$

$\uparrow$
 $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$

dove $J_3 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$

Allora $\frac{d}{dt} \underline{L}(G) = \dot{\omega} J_3 \underline{k}$

Eq. dei momenti:

$$\underline{M}^e(G) = \underline{L}^e = \frac{d}{dt} \underline{L}(G) \Rightarrow \text{vincolo} \\ \text{liber}$$

$$\longrightarrow J_3 \dot{\omega} = 0 \quad \text{lungo } \underline{k}$$

Quindi $\omega(\tau) = \omega(\tau=0) = \omega_0 = \text{costante}$

→ rotazione uniforme

Andiamo a vedere le equazioni rimanenti:

Forze: lungo $\underline{i}, \underline{j} \rightarrow \underline{F_G} = \underline{0}$

Risultante $\rightarrow \underline{F_G} = -M \underline{g}$

Supponiamo che ci sia una coppia di attrito, ad esempio di momento $-v \underline{\omega}$
($v > 0$)

Contro l'eq. dei momenti in direzione $\underline{k}$

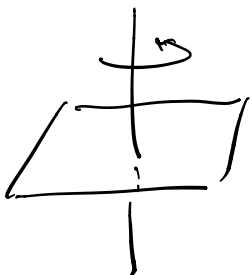
$$\Rightarrow J_3 \dot{\omega} = -v \omega$$

$$\left(\frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{\tau_G} = M(\underline{g}) \right)$$

$$\text{Si risolve: } \omega(\tau) = \omega_0 \exp\left(-\frac{v}{J_3} \tau\right)$$

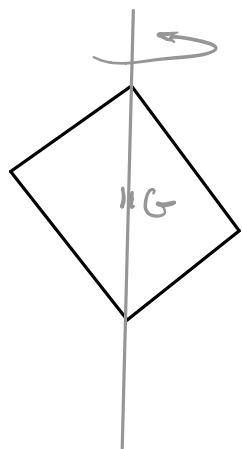
$$\omega_0 = \omega(\tau_0)$$

→ la rotazione rallenta.



risolto, con 0 senza attrito

Esempio 2

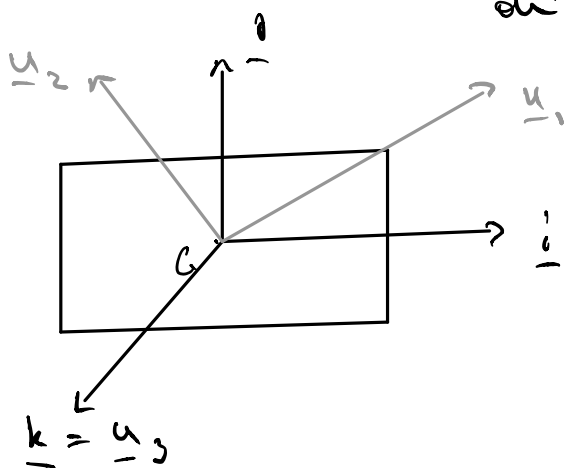


$\downarrow g$

Stessa situazione, ma con la lamina orientata diversamente

l'axe di rotazione è la diagonale del rettangolo

→ non è più axe principale di inerzia



$$\underline{\omega} = \omega \underline{u}_1, \quad \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

consideriamo la base

$$S(G; \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 = \underline{k})$$

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underline{L}(G) = I_G(\omega \underline{u}_1) = \omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lineare}}}{I_G(\underline{u}_1)} =$$

$$= \omega \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \left(\underline{I_{11} u_1 + I_{12} u_2} \right)$$

$$\text{Adesso } \frac{d}{dt} \underline{L}(G) = \dot{\omega} \underline{I}_G(\underline{u}_1) + \omega^2 \underline{u}_1 \wedge \underline{I}_G(\underline{u}_1)$$

$$= \dot{\omega} \underline{I_{11} u_1 + I_{12} u_2} + \omega^2 \underline{I_{12} u_3}$$

(obtiniamo subito $\frac{d}{dt} L(t) = I_0(\dot{\omega}) + \omega \wedge I_0(\omega)$)

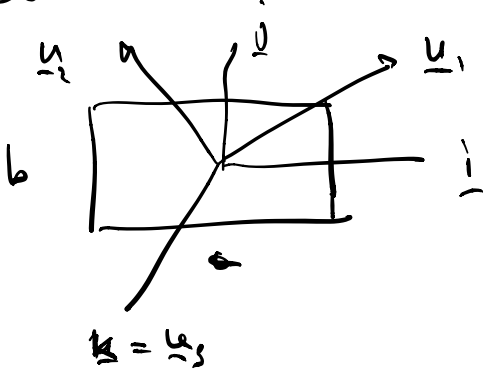
Eq. cardinali $\underline{M}^c(G) = \underline{\mu}_G^c = \frac{d}{dt} \underline{L}(G)$

$$\begin{cases} I_{11} \dot{\omega} = 0 \\ \underline{\mu}_G^c \cdot \underline{u}_2 = I_{12} \dot{\omega} \\ \underline{\mu}_G^c \cdot \underline{u}_3 = I_{12} \omega^2 \end{cases}$$

eq. di moto

momenti di reazione

Calcoliamo I_{12}, I_{11}, I_{22}



$i, j, u \rightarrow$ principale

$$\underline{u}_1 = \frac{a \underline{i} + b \underline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\underline{u}_2 = \frac{-b \underline{i} + a \underline{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Matrice di inerzia
nelle base

principale

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Nelle base $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$I_{11} = \underline{u}_1 \cdot I_G(\underline{u}_1)$$

$$I_{22} = \underline{u}_2 \cdot I_G(\underline{u}_2)$$

$$I_{12} = \underline{u}_1 \cdot I_G(\underline{u}_2)$$

$$I_{11} = \underline{u}_1 \cdot I_G(\underline{u}_1) =$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12} (a^2+b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{M b^2}{12} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{M a^2}{12} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{6} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$I_{22} = \underline{u}_2 \cdot I_G(\underline{u}_2) = \dots \quad \text{per esercizio}$$

$$I_{12} = \underline{u}_1 \cdot I_G(\underline{u}_2) = \dots$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 17 APRILE 2020

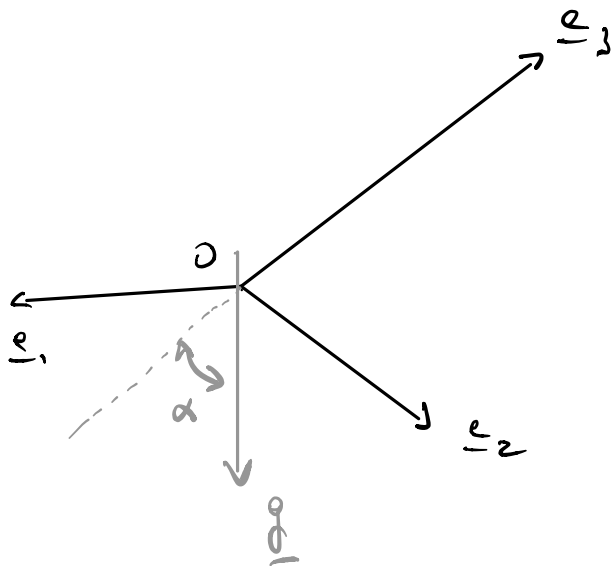
— SECONDA PARTE

Consideriamo un rigido soggetto al proprio peso, vincolato a muoversi intorno ad un

asse obliquo rispetto alla verticale

Tema fissa

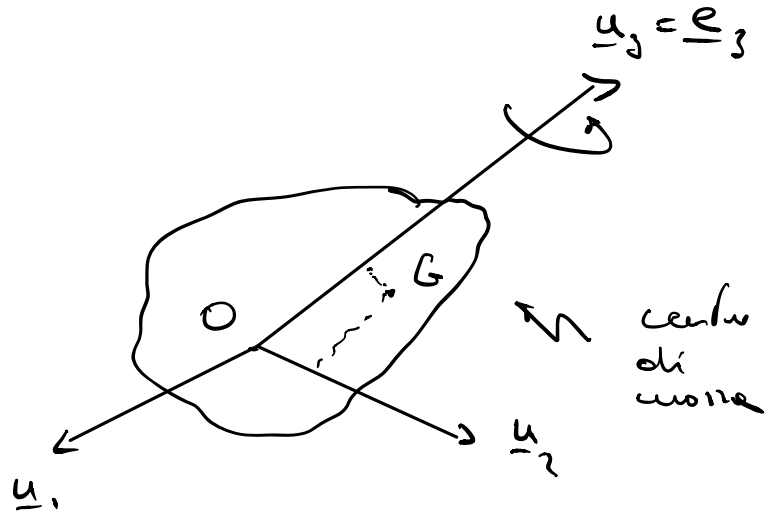
$$\Sigma (0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$$



$$\underline{g} = g \sin \alpha \underline{e}_2 - g \cos \alpha \underline{e}_3$$

Tema solidale

$$S(0; \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$$



$$(\underline{x}_G - \underline{x}_O) = y_G \underline{u}_2 + z_G \underline{u}_3$$

G è l'asse di rotazione

Equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} M \underline{g} + \underline{F}_0^e = \underline{\dot{p}} \\ (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge M \underline{g} + \underline{p}_0^e = \frac{d}{dt} \underline{L}(0) \end{cases}$$

Esprimiamo $\underline{g} = g \sin \alpha \underline{e}_2 - g \cos \alpha \underline{e}_3$

$$\begin{aligned} (\underline{g})_S &= R^T(\varphi) (\underline{g})_\Sigma = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= g (\sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_1 + \sin \alpha \cos \varphi \underline{u}_2 - \cos \alpha \underline{u}_3) \end{aligned}$$

Adesso possiamo calcolare il momento

$$\begin{aligned}
 (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge M \underline{g} &= (y_G \underline{u}_2 + z_G \underline{u}_3) \wedge \\
 &\quad \wedge M g \left(\sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_1 + \sin \alpha \cos \varphi \underline{u}_2 - \cos \alpha \underline{u}_3 \right) \\
 &= M g \left(-y_G \sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_3 - y_G \cos \alpha \underline{u}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + z_G \sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_2 - z_G \sin \alpha \cos \varphi \underline{u}_1 \right) \\
 &= M g \left[\left(-y_G \cos \alpha - z_G \sin \alpha \cos \varphi \right) \underline{u}_1 + \right. \\
 &\quad \left. + z_G \sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_2 - y_G \sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_3 \right]
 \end{aligned}$$

Dato I_O nelle Terre solide

$$\underline{L}(O) = I_O (\omega \underline{u}_3)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L}(O) = \dot{\omega} \underline{I}_O(\underline{u}_3) + \omega^2 \underline{u}_3 \wedge \underline{I}_O(\underline{u}_3)$$

$$I_O(\underline{u}_3) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ I_{33} \end{pmatrix}$$

$\underline{u}_3$

$$I_{13} \underline{u}_1 + I_{23} \underline{u}_2 + I_{33} \underline{u}_3$$

$$\underline{u}_3 \wedge I_0(\underline{u}_3) = \begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \underline{u}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{23} \\ I_{13} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} L(0) = \underline{u}_1 \left(I_{13} \dot{\omega} - I_{23} \omega^2 \right) + \underline{u}_2 \left(I_{23} \dot{\omega} + I_{13} \omega^2 \right) + \underline{u}_3 I_{33} \dot{\omega}$$

$-I_{23} \underline{u}_1 + I_{13} \underline{u}_2$

$$\omega = \dot{\varphi}$$

Allora : $(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge M \underline{g} + \underline{p}_O^2 = \frac{d}{dt} L(0)$

lungo $\underline{u}_3$ (asse di rotazione)

$$\underline{I}_{33} \ddot{\varphi} = - (M g y_G \sin \alpha) \underline{\sin \varphi}$$

lungo $\underline{u}_1$ (reazioni vincolari)

$$\underline{p}_O^2 \cdot \underline{u}_1 = M g (y_G \cos \alpha + r_C \sin \alpha \cos \varphi) + \underline{I}_{13} \ddot{\varphi} - I_{23} \dot{\varphi}^2$$

lungo $\underline{u}_2$ (reazioni vincolari)

$$\underline{p}_O^2 \cdot \underline{u}_2 = - M g r_C \sin \alpha \sin \varphi + \underline{I}_{23} \ddot{\varphi} + I_{13} \dot{\varphi}^2$$

Usiamo la conservazione dell'energia
(perché i vincoli sono lisci, la forza peso
è conservativa).

$$(K + V)_t = E = (K + V)_{t=0}$$

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot \underline{I}_0(\underline{\omega}) = \frac{1}{2} \omega^2 \underline{u}_3 \underline{I}_0 \underline{u}_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 I_{33,0}$$

$$V = -Mg \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0) =$$

$$= -Mg \left(\sin \alpha \sin \varphi \underline{u}_1 + \sin \alpha \cos \varphi \underline{u}_2 + \right.$$

$$\left. - \cos \alpha \underline{u}_3 \right) \cdot (y_G \underline{u}_2 + z_G \underline{u}_3)$$

$$= -Mg (y_G \sin \alpha \cos \alpha - z_G \cos \alpha)$$

Quindi, mettendo Tutto insieme

$$E = K + V = \frac{1}{2} I_{33} \dot{\varphi}^2 - Mg \left(y_G \sin \alpha \cos \alpha + \right.$$

$$\left. - \underbrace{z_G \cos \alpha}_{\text{costante}} \right)$$

potremmo

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \dot{\varphi}(t=0) \\ \varphi_0 = \varphi(t=0) \end{array} \right.$$

$$E_{t=0} = \frac{1}{2} I_{33} \omega_3^2 - M g (y_0 \sin \alpha \cos \varphi_0 - z_0 \cos \alpha)$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ricavare $\dot{\varphi}^2$ in funzione di φ ed t

Dall'eq. del moto possiamo ricavare $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ

Allora possiamo ottenere i momenti di reazione in funzione di φ , senza aver integrato le equazioni del moto