Esercizi 17 Aprile

Istituzioni di Matematiche B – prof. Vlacci

Corso di Laurea in Geologia

ESERCIZIO 1: Sia f una funzione reale e positiva (negativa) definita e continua in $[a, +\infty)$.

i) Convincersi che

$$\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

è una funzione crescente (decrescente).

ii) Se esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

[Procedere per assurdo; se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$, allora $l > 0$ ($l < 0$) e quindi, scelto opportunamente $\varepsilon > 0$ risulta $f(x) > l - \varepsilon > 0$ ($f(x) < l + \varepsilon < 0$) per $x > x_0 > a$. Pertanto dal confronto per gli integrali......]

iii) Si mostri - con un esempio - che la condizione f infinitesima per $x \to +\infty$ NON è sufficiente per garantire l'integrabilità di f in $[a, +\infty)$.

iv) Se esiste g funzione reale e continua in $[a, +\infty]$ tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$$
$$(g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, +\infty))$$

allora se esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t$$

esiste finito anche

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

v) Essendo $0 < f(x) \leq |f(x)|$ $(0 > f(x) \geq -|f(x)|)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ si mostri che se esiste finito

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

esiste finito anche

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t.$$