Teorema di Li-Yorke

Il teorema di Li-Yorke, pubblicato nel 1975, permette di dimostrare che, se una mappa scalare possiede un'orbita 3-periodica, allora ammette orbite di periodo qualsiasi.

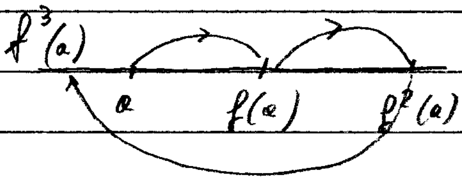
Teorema di Li-Yorke (Enunciato)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed esiste un punto $a \in \mathbb{R}$ tale che

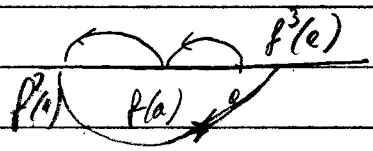
$$(1.1) \qquad f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$$

oppure

$$(1.2) \qquad f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$$



oppure



Allora, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la mappa scalare

$$(1.3) \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

ha orbite di periodo minimo n.

Corollario ["Periodo 3 implica il caos"]

Se nella (1.1) o (1.2) è soddisfatta l'uguaglianza, a è un punto 3-periodico. Quindi, la presenza di un'orbita 3-periodica implica l'esistenza di orbite di qualsiasi periodo per la mappa (1.3)

N.B. Come si vede dall'enunciato, il Teo. di Li-Yorke vale sotto l'ipotesi di sola continuità della funzione f. Inoltre, nell'ipotesi del Corollario, i 3-cicli (1.1) e (1.2) esauriscono tutti i possibili 3-cicli a meno di permutazioni di $(a, f(a), f^2(a))$.

Per dimostrare il Teo. di Li-Yorke, richiameremo, prima, alcuni risultati noti di Analisi e poi dimostreremo alcuni Lemmi. Ricordiamo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.

- Se f è continua, manda intervalli chiusi e limitati in intervalli chiusi e limitati.

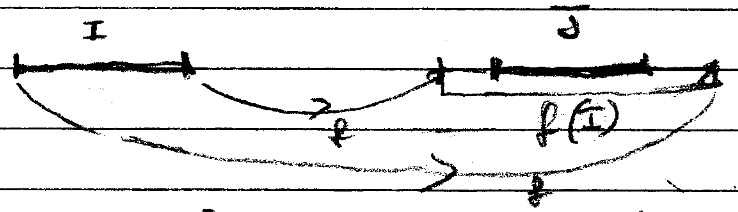
- Teorema dei valori intermedi (Darboux)
  Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Allora, se f è continua, assume in $[a,b]$ tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

<u>Def.</u> [f-copertura]. Siano I e J due intervalli <u>chiusi</u> e <u>limitati</u> di $\mathbb{R}$. Diremo che I f-copre J e scriveremo

$$I \xrightarrow{f} J$$

se

$$f(I) \supseteq J$$



ciò equivale a dire che $\forall\, y \in J\ \exists\, x \in I$ t.c. $f(x) = y$

Es. I f-copre $f(I)$.

N.B. Se I f-copre J, allora copre ogni sottoinsieme di J.

N.B. Il Teo di Darboux si può esprimere dicendo che

$$[a,b] \ f\text{-copre}\ [f(a), f(b)]$$

<u>Def.</u> [f-copertura esatta]. Siano I e J due intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. Diremo che I f-copre <u>esattamente</u> J se

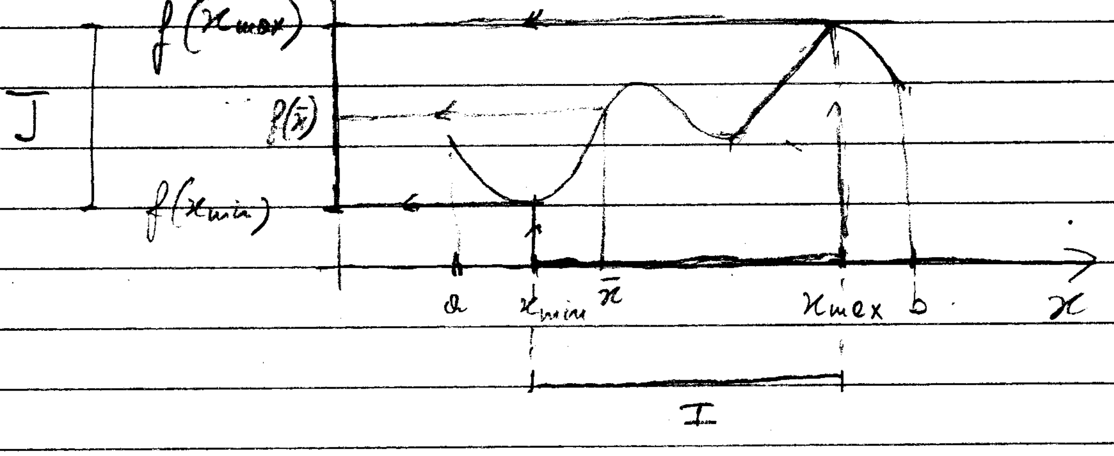
$$\left.\begin{array}{l} i)\ f(\partial I) = \partial J \\ ii)\ f(\mathrm{int}(I)) = \mathrm{int}(J) \end{array}\right\} \Rightarrow iii)\ f(I) = J$$

N.B La i) e ii) implicano iii) poiché $f(\partial I \cup \mathrm{int}(I)) = f(\partial I) \cup f(\mathrm{int}(I)) = J$.

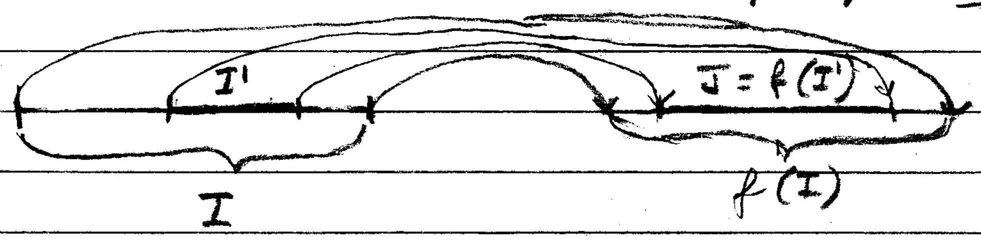
<u>Esempio</u> Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Siano x_{min} e x_{max} due punti, rispettivamente, di minimo e massimo assoluto (esistono per il Teorema di Weierstrass). Se x_{min} e x_{max} sono gli unici punti di min. e max. assoluti, e $x_{min} < x_{max}$

$$I = [x_{min}, x_{max}] \xrightarrow[\text{esattamente}]{f} J = [f(x_{min}), f(x_{max})]$$

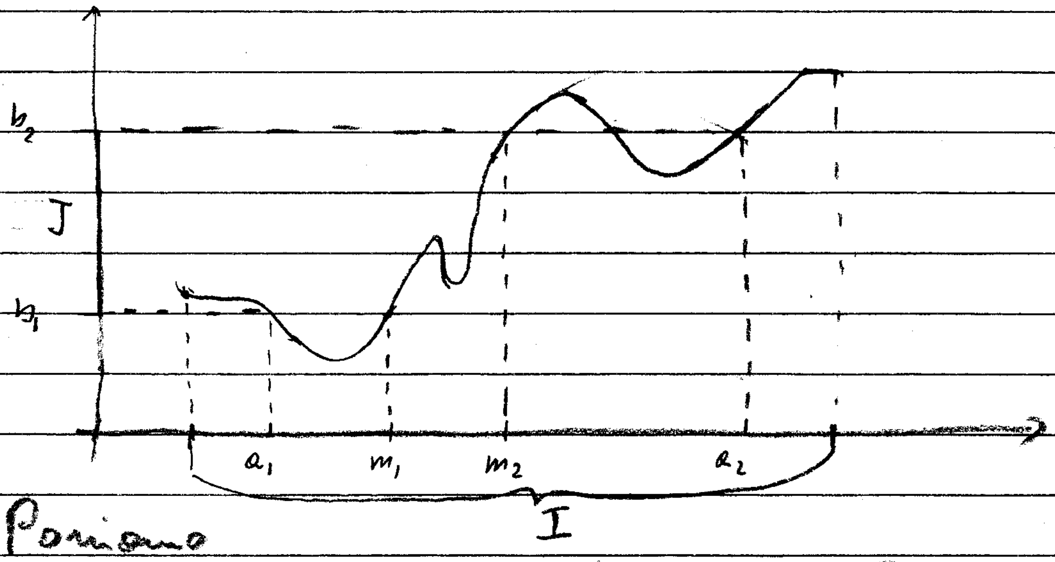
Infatti, i) è soddisfatta per costruzione. ii) è soddisfatta perché se, per assurdo, esistesse $\bar{x} \in \mathrm{int}(I)$ tale che $f(\bar{x}) \notin \mathrm{int}(J)$, allora o $f(\bar{x}) \le f(x_{min})$ o $f(\bar{x}) \ge f(x_{max})$, che contraddicono le ipotesi. Quindi $f(\mathrm{int}(I)) \subseteq \mathrm{int}(J)$. D'altra parte, $\mathrm{int}(J) \subseteq f(\mathrm{int}(I))$ poiché se per assurdo esistesse $y \in]f(x_{min}), f(x_{max})[$ tale che $y = f(x_{min})$ oppure $y = f(x_{max})$, y sarebbe un min. o un max. assol.



<u>Lemma</u> [f-copertura esatta]. Siano I e J due intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. Se I f-copre J, allora $\exists$ un sottointervallo chiuso $I' \subseteq I$ che f-copre <u>esattamente</u> J.



<u>Dem.</u> Sia $J = [b_1, b_2]$. Poiché I f-copre J, $\exists\, a_1, a_2 \in I$ tali che $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Supponiamo $a_1 < a_2$. (Se invece $a_1 > a_2$ la dimostrazione può essere svolta scambiando il sup con l'inf).



Poniamo

$$m_1 = \sup \{ x \in [a_1, a_2],\ f(x) = b_1 \}$$

Per la continuità di f e le proprietà del sup risulta

$$f(m_1) = b_1, \quad a_1 \le m_1 < a_2$$

Poniamo, poi

$$m_2 = \inf \{ x \in [m_1, a_2],\ f(x) = b_2 \}$$

Si ha

$$f(m_2)=b_2, \quad a_1\le m_1<m_2\le a_2.$$

i) Allora, l'intervallo $I':=[m_1,m_2]$ soddisfa la i); inoltre, in ogni suo punto interno la f assume valori $\neq$ da b_1, b_2.

ii) Se $\bar{x}\in]m_1,m_2[$ allora $f(\bar{x})\neq b_1$ e $f(\bar{x})\neq b_2$ per la costruzione di m_1 e m_2. Inoltre, $f(\bar{x})$ non può essere esterno a $[b_1, b_2]$. Infatti, se $f(\bar{x})$ fosse maggiore di b_2, allora in un punto di $]m_1, \bar{x}[$ la f assumerebbe il valore b_2; mentre se $f(\bar{x})$ fosse minore di b_1, allora in un punto di $]\bar{x}, m_2]$ f assumerebbe il valore b_1. Assurdo in entrambi i casi. Quindi, $f(\mathrm{int}(I'))\subseteq \mathrm{int}(J)$. Viceversa, $\mathrm{int}(J)\subseteq f(\mathrm{int}(I'))$ per il Teo di Darboux. ■

Lemma [Catena di f-coperture] Siano I_k, $k=0,1,\dots,n$, intervalli chiusi e limitati, eventualmente alcuni coincidenti, tali che ognuno copre il successivo

$$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \cdots I_{n-1} \xrightarrow{f} I_n$$

Allora $\exists$ un intervallo chiuso $I'\subseteq I_0$ tale che

a) I' f^n-copre esattamente I_n;

b) $f^k(I')\subseteq I_k$, $k=1,2,\dots,n-1$

Dim. Procede per induzione su n.
Se $n=1$ e $I_{n-1}\xrightarrow{f} I_n$, per il Lemma precedente esiste un sottointervallo $I''\subseteq I_{n-1}$ tale che

$$I'' \xrightarrow[\text{esattamente}]{f} I_n$$

Supponiamo che il lemma sia vero per ogni catena di lunghezza $(n-1)$, cioè che se

$$I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n-2} \to I_{n-1}$$

allora esiste un sottointervallo $I' \subseteq I_0$ tale che

a) I' f^{n-1}-copre esattamente I_{n-1}.

b) $f^k(I') \subseteq I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$

Allora, sostituendo I_{n-1} con I'' che è ancora f-coperto da I_{n-2},

a) $f^n(I') = f f^{n-1}(I') = f(I'') = I_n$,

$f^n(\partial I') = f f^{n-1}(\partial I') = f(\partial I'') = \partial I_n$

$f^n(\mathrm{int}(I')) = f f^{n-1}(\mathrm{int}(I')) = f(\mathrm{int}\, I'') = \mathrm{int}(I_n)$.

b) $f^{n-1}(I') = I''$

Lemma [Punto fisso] Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ tale che I f-copre sè stesso

$$I \xrightarrow{f} I$$

Allora, I contiene un punto fisso di f.

Dim. Se I si riduce ad un punto, la tesi è ovvia. Altrimenti, se $I = [a_1, a_2]$ f-copre sè stesso, quindi $\exists$ un sottointervallo $I' \subseteq I$ che f-copre esattamente I. Quindi, esistono c_1 e c_2 in I tali che

$$f(c_1) = a_1 \leq c_1, \; f(c_2) = a_2 \geq c_2.$$

Quindi, la funzione continua $g(x) = f(x) - x$ assume valori di segno opposto in c_1 e c_2 oppure si annulla in almeno uno dei due punti. In entrambi i casi $g(x)$ ha almeno uno zero in $[c_1, c_2]$ se $c_1 < c_2$, o in $[c_2, c_1]$ se $c_1 > c_2$.

<u>Lemma</u> [Cicli di f-coperture]. Siano $\{I_k\}_{k=0,1,n}$ intervalli chiusi e limitati (non necessariamente distinti). Se risulta

(8.1) $$I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \cdots \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{f} I_n = I_0$$

allora f ha un punto <u>n-periodico</u> $x_0 \in I_0$ tale che

(8.2) $$f^k(x_0) \in I_k \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

<u>Dim</u> Per il lemma delle catene di f-copertura, in cui $I_n = I_0$, $\exists$ un intervallo chiuso $I' \subseteq I_0$ tale che

a) I' f^n-copre esattamente I_0;

b) $f^k(I') \subseteq I_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$

Dunque, per la a) I' f^n-copre sé stesso, quindi per il lemma del punto fisso, I' contiene un punto fisso x_0 di f^n
$$f^n(x_0) = x_0.$$

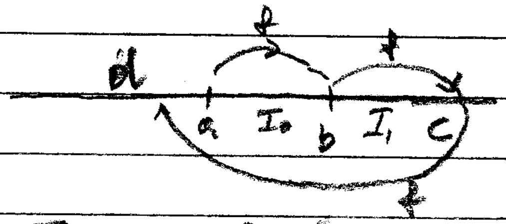
Infine, per la b) vale la (8.2).

Finalmente, dimostriamo il
Teorema di Li-Yorke (Dimostrazione)

Assumiamo che sia vera l'ipotesi (1.1)

(9.1) $$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a)$$

La dimostrazione è analoga nell'ipotesi (1.2).
Poniamo

(9.2) 

e $I_0 = [a,b]$, $I_1 = [b,c]$. Dato che $f(a)=b$, $f(b)=c$, I_0 f-copre I_1 per il teo di Darboux. Inoltre, dato che $f(b)=c$, $f(c)=d$, I_1 f-copre $I_0 \cup I_1 \subseteq [d,c]$. Allora, I_1 f-copre sé stesso, quindi contiene un punto fisso, cioè un punto 1-periodico. Proviamo ora che, per ogni $n \ge 2$, la f ammette un punto n-periodico. Consideriamo il ciclo di lunghezza n dato da

(9.3) $$\underbrace{I_0 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \dots I_1}_{n-1} \xrightarrow{f} I_n = I_0$$

Per il lemma precedente esiste in I_0 un punto x_0 n-periodico, tale che

(9.4) $$f^{(k)}(x_0) \in I_1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Dimostriamo che n è il periodo minimo. Se, per assurdo, n non fosse il periodo minimo, esisterebbe $k<n$ tale che $f^k(x_0) = x_0$. Ma allora, per la (9.4) $x_0 \in I_0 \cap I_1$, quindi

(9.5) $$x_0 = b$$

Ma la (3.5) è impossibile poiché,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{se } n=2 & d = f^2(b) = f^2(x_0) = x_0 = b\,, \\ \text{se } n>2 & d = f^2(b) = f^2(x_0) \in I_1 = [b,c]\,, \end{array}\right\} \text{assurdo poiché } d < b.$$

$\blacksquare$