Componenti orizzontali dell'equazione per la conservazione della quantità di moto in coordinate isobariche alla scala sinottica e planetaria.

Ricordando le componenti dell'equazione in coordinate di altezza (z)

$$\bar{i})\quad \frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \bar{j})\quad \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

e la relazione esistente tra il gradiente della pressione, in coordinate di altezza (z) e quello del geopotenziale, in coordinate di pressione (p)

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; ; \quad +\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Si può esprimere le componenti orizzontali dell'equazione per la conservazione della quantità di moto in coordinate isobariche (qui sotto confrontate con quelle in z)

In coordinate isobariche

$$\bar{i})\quad \frac{du}{dt} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\bar{j})\quad \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\bar{k})\quad 0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{1}{\rho}$$

In questo caso i campi sono funzione di

$$x, y, \boxed{p}, t$$

In coordinate z

$$\bar{i})\quad \frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\bar{j})\quad \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\vec{k})\quad 0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

In questo caso i campi sono funzione di

$$x, y, \boxed{z}, t$$

Si noti il vantaggio delle coordinate isobariche di rimuovere la dipendenza della densità ρ nelle componenti orizzontali.

Forma vettoriale delle componenti orizzontali dell'equazione per la conservazione della quantità di moto

Osserviamo la simmetria delle equazioni per la conservazione della quantità di moto, a scala sinottica, per le componenti orizzontali.

Definiamo il vettore $f\vec{k}$ dove f è il parametro di Coriolis e $\bar{k}$ il versore verticale (valido sia per coordinate z che per quelle p)

Il prodotto vettoriale tra $\bar{V} = (u, v, w)$ e $f\bar{k}$ permette di scrivere in forma vettoriale il contributo dell'accelerazione di Coriolis in forma vettoriale. Infatti

$$\boxed{-f\bar{k}\times\bar{V}} = - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & f \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \bar{i}\,(fv) \; + \\ +\bar{j}\,(-fu) \; + \\ +\bar{k}\,(0) \end{array}$$

Pertanto la parte dell'equazione che descrive il bilancio delle forze in orizzontale diventa.

$$\boxed{\frac{d\bar{V}_H}{dt} = -f\bar{k}\times\bar{V} - \frac{1}{\rho}\bar{\nabla}_H p}$$ in coordinate $\boxed{z}$

$$\boxed{\frac{d\bar{V}_H}{dt} = -f\vec{k}\times\bar{V} - \bar{\nabla}_H \Phi}$$ in coordinate $\boxed{p}$

Dove $\bar{V}_H = \bar{i}u + \bar{j}v$, ma ricordando che, alla scala sinottica l'equazione per la conservazione della quantità di moto indica l'equilibrio idrostatico (cioè $w=0$) come soluzione per la componente verticale, si ha che $\bar{V}_H = \vec{V} = \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}0$. Perciò non è necessario utilizzare il pedice H.
Le velocità a scala sinottica sono solo orizzontali