

# **ANALISI E COMPENSAZIONE di misure gps e reti geodetiche**

# Introduzione

- Analisi degli errori di misura e loro trattamento statistico
- Impostazione della compensazione rigorosa e interpretazione dei risultati

# Argomenti

- Richiami di statistica
- Equazioni di osservazione e leggi di propagazione degli errori
- Elementi di algebra lineare e principio dei minimi quadrati
- Compensazione rigorosa e analisi dei risultati

# Terminologia

- Osservabili geodetiche: sono tutte funzioni della posizione relativa dei punti
  - misure classiche di angoli e distanze
  - prese fotogrammetriche
  - geodesia satellitare (GPS, GLONASS)
  - telerilevamento (SPOT, ecc.)
- Sistemi di riferimento: si introducono per fissare il rilievo nello spazio
  - cartesiano ortogonale (coordinate  $x, y, z$ )
  - geografico (latitudine, longitudine, quota ellissoidica)
  - euleriano locale (Est, Nord, quota)

# Terminologia

- Reti geodetiche: consentono il passaggio dalle osservabili alle coordinate dei punti
  - livellazione
  - triangolazione e trilaterazione (classiche o GPS)
  - reti fotogrammetriche (classiche o GPS)
  - reti di deformazione (classiche - GPS - miste)
- Modello funzionale
  - insieme di relazioni, in genere non lineari, tra osservabili e coordinate
- Linearizzazione: consente di scrivere un sistema lineare di equazioni di osservazione

# Richiami di statistica

- Ogni misura fisica presenta **ERRORI**
  - GROSSOLANI (outliers)
  - SISTEMATICI (biases)
  - ACCIDENTALI (random)
- I parametri di qualità delle misure sono
  - PRECISIONE (precision)
  - ESATTEZZA (accuracy)
  - AFFIDABILITA' (reliability) e RIPETIBILITA'

# Errori grossolani

- Errori grossolani (outliers)

Nell'eseguire una misura si può commettere un errore grossolano (ad es. errore di lettura di un cerchio graduato, errore di misura altezza antenna e/o trascrizione errata)

Le misure devono essere controllate

- adozione di schemi operativi che consentano il controllo delle misure

# Errori grossolani

- Ad es. misura degli angoli interni di un triangolo (o di una poligonale chiusa di  $n$  lati)

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

- Se non si possono adottare schemi di controllo allora si ricorre alla ripetizione indipendente delle misure.

# Errori sistematici

- Un errore sistematico tipico è quello che deriva da una imperfetta taratura dello strumento di misura
- Un tipo di errore sistematico è quello che conserva, al ripetere della misura, valore e segno costanti

(esempio: misura di una lunghezza con asta lunga nominalmente 1 m)

# Errori sistematici

- Errori di tipo sistematico derivano dalle srettifiche degli strumenti di misura:

gli strumenti topografici sono concepiti in modo che le varie parti che li costituiscono soddisfino determinate condizioni geometriche.

Tali condizioni non possono essere realizzate perfettamente → organi che permettono piccoli aggiustamenti (**rettifiche dello strumento**)

# Errori sistematici

- Non potendo tali operazioni essere eseguite perfettamente esistono sempre **errori residui di srettifica** che danno generalmente effetti sistematici sui risultati delle misure.
- Esistono errori sistematici che hanno un comportamento più complesso, conservando ad es. il segno ma non il valore (ad es. errori di allineamento di un'asta lungo una determinata direzione)

# Errori sistematici

- In generale si adottano i seguenti metodi per l'eliminazione o la riduzione degli errori sistematici:
  - a) si eseguono le tarature dei campioni di misura o le rettifiche strumentali con una precisione superiore a quella delle misure che devono essere eseguite;

# Errori sistematici

b) si eliminano con opportuni procedimenti operativi;

c) si cerca, cambiando i campioni di misura o le condizioni operative, di rendere tali errori variabili in valore e segno in modo che, mediando i risultati, se ne compensino gli effetti.

# Errori accidentali

- Errori accidentali (random)

Ipotizzando che gli errori sistematici siano stati eliminati, la ripetizione della misura di una grandezza mostra che:

a) i risultati cambiano ad ogni ripetizione in modo imprevedibile;

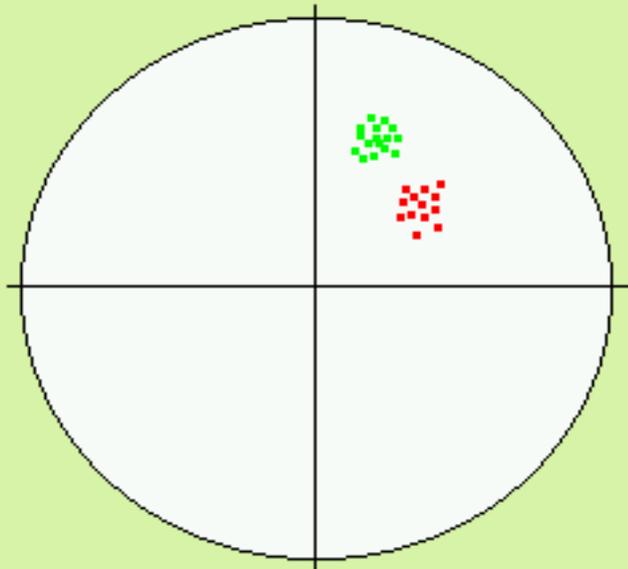
b) gli scarti fra una misura e l'altra sono piccoli con riferimento alla precisione dello strumento e del metodo di misura;

# Errori accidentali

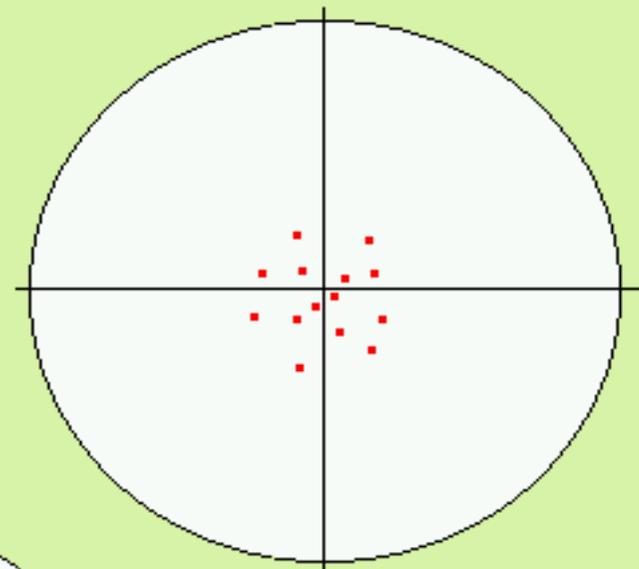
c) se le ripetizioni sono sufficientemente numerose si può notare che il rapporto fra il n. di volte in cui ogni valore si è presentato ed il n. totale di misure (frequenza relativa) tende a stabilizzarsi.

*La fluttuazione accidentale dei risultati di una misura ripetuta è un fenomeno aleatorio, va quindi applicata la statistica matematica.*

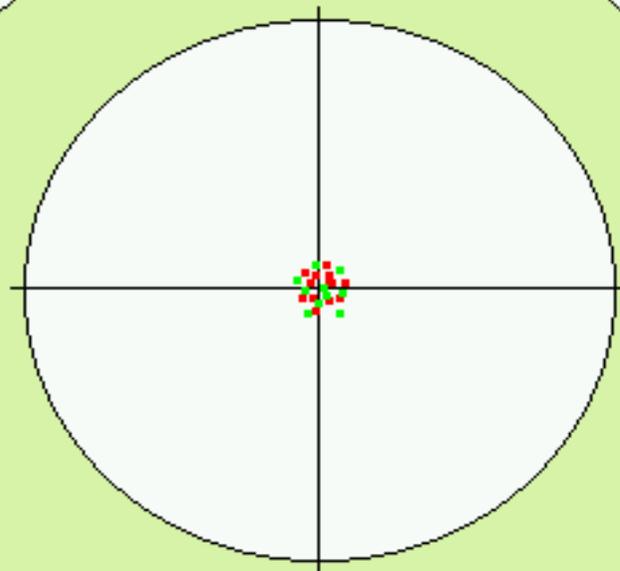
# Statistica - Errori



**precise  
inesatte  
non ripetibili**



**esatte  
imprecise**



**esatte  
precise  
ripetibili**

# Statistica - Distribuzioni

- Gli ERRORI ACCIDENTALI seguono una curva di distribuzione di Gauss, caratterizzata da:
  - MEDIA  $m$
  - SCARTO QUADRATICO MEDIO  $\sigma$
- Da un SET di  $n$  misure si può STIMARE i parametri

$$m = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n - 1}$$

# Propagazione degli errori

- Per variabili a più dimensioni
  - vettore media  $\underline{x}_m$
  - matrice di varianza-covarianza  $\Sigma_{xx}$
- Per variabili funzioni di altre:  $\underline{y} = A \underline{x}$ 
  - **Propagazione degli errori**  $\Delta \underline{y} = A \Delta \underline{x}$
  - **Propagazione della varianza**  $\Sigma_{yy} = A^T \Sigma_{xx} A$

# Equazioni di osservazione

- Sono il MODELLO FUNZIONALE e legano le OSSERVABILI con il SISTEMA DI COORDINATE

– Distanza  $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$

– Azimut  $\alpha_{ijk} = \arctg \frac{(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)} - \arctg \frac{(y_k - y_i)}{(x_k - x_i)}$

– Livellazione  $\Delta q_{ij} = z_j - z_i$

– GPS  $\Delta X_{ij} = X_j - X_i; \Delta Y_{ij} = Y_j - Y_i; \Delta Z_{ij} = Z_j - Z_i$

# Algebra lineare

- Sistema lineare  $A \underline{x} = \underline{l}$ 
  - indeterminato
  - determinato
  - sovrabbondante (è il caso normale in topografia)
- La soluzione del **sistema sovrabbondante** si ottiene considerando che il vettore misure  $\underline{l}$  è soggetto ad errori
- **Principio dei minimi quadrati**
  - $A \underline{x} = \underline{l} + \underline{v}$  con la condizione  $\underline{v}^T P \underline{v} = \min$

# Risultati delle elaborazioni

- La COMPENSAZIONE RIGOROSA fornisce la STIMA dei valori:
  - $\underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{l}}$
  - $\Sigma_{\mathbf{xx}} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$

# Riepilogo

- Per effettuare una misura GPS o calcolare una rete
  - Misure sovrabbondanti
  - Compensazione rigorosa ai minimi quadrati