

Capitolo 4

Funzioni di Più Variabili: Primi Elementi

L'analisi delle funzioni di una singola variabile è fatta sostanzialmente sulla retta \mathbb{R} e nel piano \mathbb{R}^2 . Questi sono gli ambienti naturali per lo studio dei numeri, delle successioni, delle funzioni $x \rightarrow f(x)$, delle loro proprietà di continuità ed anche del loro grafico dato dalle coppie (x, y) che soddisfano l'equazione $y = f(x)$, per lo studio delle tangenti a tali grafici e le "aree" che potremmo voler misurare con l'integrazione.

Per operare con funzioni di più variabili abbiamo bisogno di rivolgerci almeno ad \mathbb{R}^3 , infatti, come è noto il grafico di una funzione $z = f(x, y)$, dove (x, y) rappresentano le variabili indipendenti, "vive" in \mathbb{R}^3 .

In questo primo capitolo vogliamo ricordare alcune delle proprietà dello spazio Euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 . Per quanto familiare esso sia (è lo spazio in cui viviamo) esso ci pone tuttavia una serie di problemi di visualizzazione. La visione bidimensionale (su foglio o schermo) di oggetti tridimensionali è sempre distorta ed incompleta. Imparare a controllare punti di osservazione, prospettive, sezioni è un momento importante dell'apprendimento intuitivo.

4.1 Coordinate Cartesiane in Tre Dimensioni.

Ricordo che nel piano \mathbb{R}^2 la **distanza** tra i punti $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ è data dal familiare *teorema di Pitagora*

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

e che le coordinate (\bar{x}, \bar{y}) del **punto medio** M del segmento che unisce P e Q sono date da:

$$M = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right).$$

In tre dimensioni le formule non sono molto diverse limitandosi ad aggiungere in modo simmetrico (come ovvio) la terza coordinata z

Definizione 4.1 La distanza tra i punti $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$ è data da:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Il **punto medio** M del segmento \overline{PQ} ha coordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ date da

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$

Esempio 4.2 Consideriamo i punti $P=(0, 0, 0)$ e $Q=(1, 3, 5)$. Trovare la distanza tra P e Q ed le coordinate del punto medio M .

Soluzione: Usando la formula della distanza si ottiene

$$d(P, Q) = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35} \approx 5.9161.$$

Le coordinate del punto medio sono date da

$$M = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{3+0}{2}, \frac{5+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

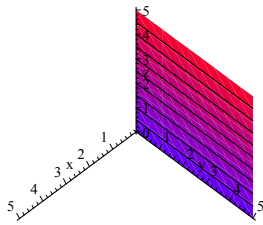
■

4.2 Equazioni e Loro Grafici

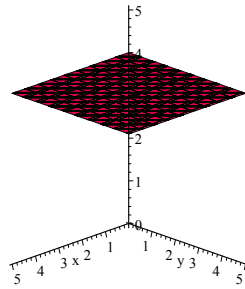
In due variabili il grafico di una equazione in x ed y è l'insieme dei punti del piano (x, y) che soddisfano l'equazione. Il grafico di $x^2 + y^2 = a^2$ è, per esempio, la circonferenza centrata nell'origine di raggio a . Il grafico dell'equazione $y = 0$ è l'asse delle x .

In \mathbb{R}^3 la situazione è del tutto analoga, il grafico di una equazione che lega tra loro le variabili x, y, z è l'insieme dei punti (x, y, z) dello spazio che soddisfano l'equazione.

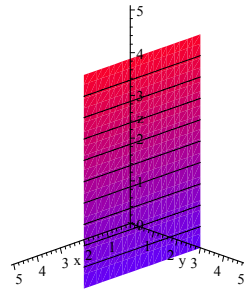
Per esempio le equazioni $x = 0$, $z = 4$, $y = 3$ hanno grafici (relativamente al solo primo ottante) del tipo:



$$x = 0$$



$$z = 4$$



$$y = 3$$

Da notare, come negli esempi di cui sopra, il grafico sia *un piano*, cioè *un oggetto bidimensionale*.

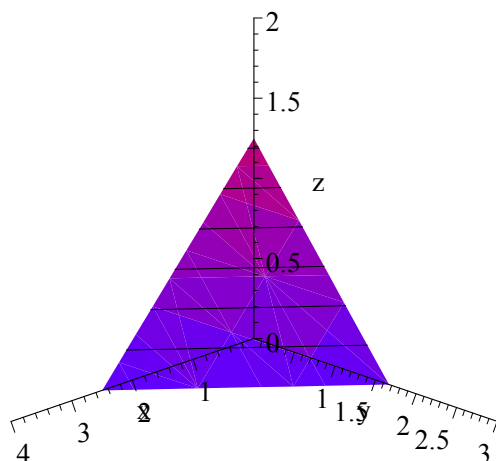
Il disegno ci indica che il grafico di un'equazione *ha* (intuitivamente) *dimensione meno uno rispetto al numero delle variabili* (il concetto di dimensione per situazioni non piane verrà chiarito meglio nel seguito).

4.2.1 Equazioni Lineari.

Come già visto nel corso di geometria una *equazione lineare* in \mathbb{R}^3 è un oggetto della forma $ax + by + cz = 0$ con almeno uno dei tre coefficienti a, b, c non nulli. Per estensione chiameremo lineare, anche se l'aggettivazione corretta sarebbe *affine*, una equazione del tipo $ax + by + cz = d$ con d non nullo.

I tre esempi sopra sono perciò equazioni lineari ed esemplificano il fatto a voi noto che *il grafico di una equazione lineare è (rappresenta) un piano*.

Esempio 4.3 *L'equazione $2x + 3y + 4z = 5$ rappresenta l'equazione di un piano che intercetta i punti $(5/2, 0, 0)$, $(5/3, 0, 0)$, $(5/4, 0, 0)$ relativamente agli assi x, y, z rispettivamente.*



$$2x + 3y + 4z = 5$$

Ricordiamo che l'intersezione di un grafico con i piani coordinati rappresenta *la traccia* del grafico rispetto a tali piani. Un modo semplice per ottenere la traccia è quello di porre uguale a zero il valore della variabile non appartenente al piano dato. Ad esempio ponendo $z = 0$ nell'equazione precedente si ottiene $2x + 3y = 5$ che rappresenta la retta traccia del piano dato rispetto al piano coordinato xy .

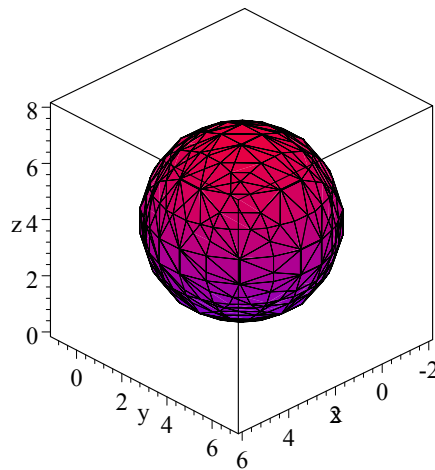
4.2.2 Sfera

Ci limitiamo a ricordare che la sfera è *il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato, detto centro*. Quindi, dato il centro $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e la distanza R , i punti della sfera sono quelli che soddisfano l'equazione

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

o, che è lo stesso

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 10$$

Esempio 4.4 Consideriamo l'equazione $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = -1$. E' questa l'equazione di una circonferenza?

Soluzione: Per rispondere al quesito posto basta "completare" i quadrati relativi alle espressioni per le variabili x , y , z e verificare se l'equazione che definisce una sfera è soddisfatta.

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4 - 1$$

da cui si ottiene

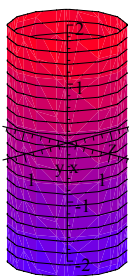
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = -1 + 5 = 4$$

Si ha cioè l'equazione della sfera di centro $(2, -1, 0)$ e raggio 2. ■

4.2.3 Cilindro

Cosa rappresenta nel piano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$? La risposta è ovvia per tutti, è l'equazione della circonferenza di centro $(0, 0)$ e di raggio 1. Cosa rappresenta la stessa equazione quando letta in \mathbb{R}^3 ?

L'equazione ci dice che il legame tra le variabili (a priori x , y , z) non implica z . Questo significa che per qualunque valore z_0 della variabile z si ottiene lo stesso risultato che per $z = 0$. Cioè variando la z , o che è lo stesso sezionando il grafico col piano $z = z_0$ si ottiene sempre la stessa figura, una circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine

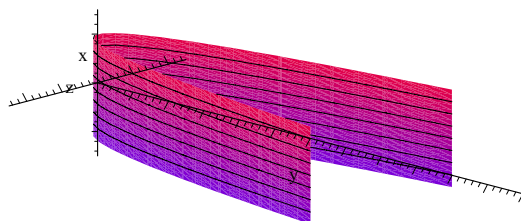


$$x^2 + y^2 = 1$$

Non si hanno cioè "vincoli" sulla variabile z . Il luogo dei centri delle circonferenze che si ottengono considerando il grafico sui piani $z = z_0$ (costante), che in questo caso è l'asse z , è detto **asse del cilindro**

Se consideriamo adesso l'equazione $y = x^2$ in \mathbb{R}^2 abbiamo come ben noto l'equazione di una parabola, **se** la consideriamo in \mathbb{R}^3 ci troviamo di fronte alla stessa situazione appena vista per l'equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Anche in questo caso, qualunque sia il valore z_0 della variabile z otteniamo la stessa figura



$$y = x^2$$

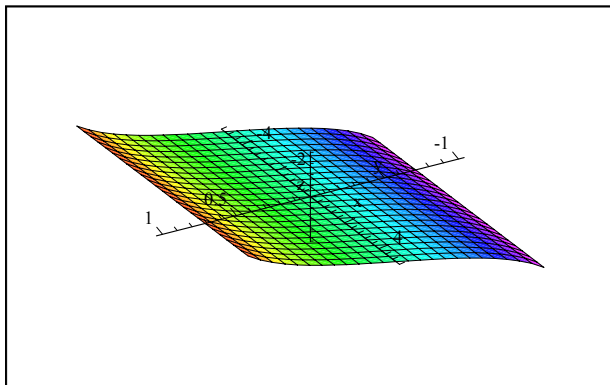
Definizione 4.5 In \mathbb{R}^3 , chiameremo **cilindro**, o meglio, diremo che un'equazione rappresenta un cilindro quando in questa manca almeno una variabile indipendente.

Nota 4.6 Nel linguaggio comune la parola "cilindro" indica un "tubo circolare". Come si intuisce dagli esempi e dalla definizione, in matematica il suo significato è molto più generale.

Esempio 4.7 Discutere il grafico dell'equazione $z = \tan x$ in \mathbb{R}^3 .

Soluzione: Poiché manca la variabile y il grafico di questa equazione non ha restrizioni rispetto a questa variabile. Rappresenta perciò l'equazione di un cilindro.

Che tipo di cilindro? Se ci restringiamo al piano xz l'equazione data ha come grafico quello della funzione tangente. Siamo allora di fronte ad un cilindro che ha come sezione su ogni piano parallelo al piano xz il grafico della funzione tangente. $\tan x$

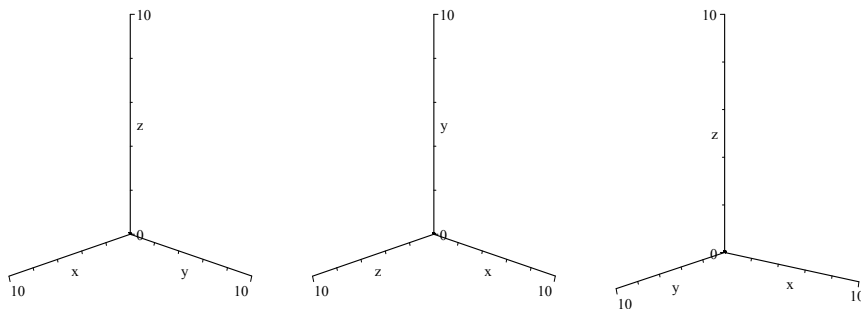


$$z = \tan x$$

4.2.4 Orientazione

Tre rette, a due a due perpendicolari e coincidenti in un punto possono servire come assi coordinati. La scelta degli assi possono essere molteplici

Tre sistemi di assi



Un attento esame mostra una sottile differenza, che chiameremo **orientazione**, tra i primi due ed il terzo sistema di riferimento. I primi due sistemi sono sistemi orientati secondo "la mano destra", mentre il terzo è orientato secondo "la mano sinistra".

La motivazione è la seguente:

se indice e medio vanno a rappresentare l'orientazione positiva degli assi x ed y rispettivamente, allora il pollice indica il verso positivo dell'asse z .

Risulta anche chiaro, allora la denominazione del terzo.

I due sistemi non sono congruenti, nel senso che non è possibile, con un movimento rigido, sovrapporre i due sistemi di riferimento.

In queste dispense useremo sempre sistemi della mano destra.

4.2.5 Esercizi

- Abbiamo detto che il grafico dell'equazione $y = \tan(x)$ rappresenta un cilindro in \mathbb{R}^3 , con asse parallelo all'asse z .
 - Disegnare il grafico di $z = \tan(y)$ in \mathbb{R}^3 . Qual'è l'asse del cilindro?
 - Disegnare il grafico di $x = \tan(y)$ in \mathbb{R}^3 . Qual'è l'asse del cilindro?
- Disegnare il grafico dell'equazione $3x^2 + 4y^2 = 12$, dapprima come elemento di \mathbb{R}^2 e poi come elemento di \mathbb{R}^3
- Disegnare in \mathbb{R}^3 i grafici delle equazioni di cui sotto e descriverne le proprietà
 - $x^2 - z^2 = 0$;
 - $x^2 + z^2 = 1$;
 - $y^2 + z = 1$;
 - $x^2 - y^2 = 1$.
- Scrivere le equazioni dei seguenti luoghi geometrici:
 - Sfera di raggio 2 centrata nel punto $(1, 4, 9)$;
 - Sfera di raggio 5 centrata nel punto $(0, 3, 4)$;
 - Cilindro circolare di raggio 1 avente come asse l'asse delle x ;
 - Cilindro circolare di raggio 4 avente come asse l'asse delle z ;
 - Come rappresentereste, usando una superficie cilindrica, onde che si muovono lungo l'asse x ?
- Cosa rappresenta l'equazione $z = 3$?
- Il grafico dell'equazione $x^2 - 6x + y^2 + 4y + z^2 - z = 0$ rappresenta una sfera.
 - Trovarne centro e raggio;
 - Porre $x = 0$ nell'equazione data. Dire cosa rappresenta l'equazione ottenuta. (**Att.ne:** si intersecano i grafici di due equazioni);
- Lo spazio \mathbb{R}^3 è diviso dagli assi coordinati in ottanti. Scrivere 8 punti diversi aventi coordinate ± 1 , uno per ogni ottante. Disegnare un grafico mostrando gli otto punti.

8. Considerare l'equazione lineare $Ax + By + Cz = D$ con A, B, C , non tutti nulli.
- (a) Trovare (se possibile) l'intersezione del piano con l'asse x . Dare un esempio di piano senza intersezione con l'asse x ;
 - (b) Trovare (se possibile) l'intersezione del piano con l'asse z . Dare un esempio di piano senza intersezione con l'asse z ;
9. L'equazione lineare $3x + 4y + 5z = 6$ definisce un piano p in \mathbb{R}^3 .
- (a) Trovare la traccia del piano p sul piano xy ;
 - (b) Trovare la traccia del piano p sul piano yz ;
 - (c) Trovare la traccia del piano p sul piano $z = 1$;
10. Dato il piano p di equazione $4x + 2y + z = 4$.
- (a) Trovare l'intersezione con i tre assi coordinati; usarla per tracciare p nel primo ottante;
 - (b) Trovare la traccia di p su ognuno dei piani coordinati;
11. Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ due punti appartenenti al piano di equazione $Ax + By + Cz = D$. Mostrare che il punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ appartiene al piano.

4.3 Funzioni di Più Variabili

Consideriamo la funzione g definita da $g(x, y) = x^2 + y^2$. La g accetta, come ingresso (**variabile indipendente**) una coppia di numeri reali (x, y) e rende in uscita (**variabile dipendente**) un terzo numero reale, $x^2 + y^2$. Se, per esempio $x = 2$ e $y = 1$ allora si ha che $g(2, 1) = 4 + 1 = 5$.

Notiamo immediatamente che così come abbiamo definito una funzione di due variabili, possiamo senza molto sforzo definire funzioni di tre o quattro variabili, come ad esempio

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad k(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

In questo corso, ci limiteremo comunque a due (a volte tre) variabili indipendenti.

4.3.1 Perché Studiare Funzioni di Più Variabili.

Non vi è dubbio che già lo studio delle funzioni di una sola variabile è di per se non banale. Perché complicare ancora le cose aggiungendo variabili?

Una (non la sola, e neanche la più amata dai matematici) possibile, semplice risposta è che le funzioni di più variabili sono essenziali per descrivere e prevedere fenomeni di varia natura. Per esempio, in economia, il guadagno di un'azienda manifatturiera dipende da molti fattori tra loro indipendenti (variabili): costo delle materie prime, costo del lavoro, distanza dai mercati, etc. In fisica, il moto di un satellite nello spazio dipende dall'attrazione della terra, da quella lunare, dalla forza dei motori, etc. In biologia, la variazione di una popolazione dipende dalle variazioni climatiche, dalle scorte di cibo, dalla presenza o meno di predatori e quant'altro. La temperatura varia sia con la latitudine che con la longitudine. Il nostro mondo, in breve, è multidimensionale: per modellarlo abbiamo bisogno di strumenti a più variabili.

Vocabolario. La maggior parte delle parole base e delle notazioni per funzioni di più variabili sono simili a quelle per funzioni di una variabile. Una funzione non è altro che una "macchina" che accetta ingressi (input) (uno o più dimensionali) e assegna uscite (output) (uno o più dimensionali). In modo più formale ricordo che gli elementi formativi di una funzione sono:

Dominio. Il **dominio** di una funzione è l'insieme degli ingressi ammissibili. Per la funzione g di cui sopra il dominio è l'insieme delle coppie (x, y) per cui le operazioni che definiscono la funzione, sono ammissibili, cioè \mathbb{R}^2 .

Rango (o Codominio). Il **rango** di una funzione è l'insieme delle possibili uscite. Per la funzione g il rango è il sotto insieme di \mathbb{R} dei numeri non-negativi, cioè $[0, +\infty)$.

Legge. La **legge** (di trasformazione) di una funzione è il metodo (l'insieme delle operazioni) che trasforma l'ingresso in uscita. Nell'esempio della funzione g la legge è data dalla formula algebrica $x^2 + y^2$.

NOTA. Abbiamo usato la notazione $g(x, y) = x^2 + y^2$ per descrivere una certa funzione di due variabili. Altre notazioni sono a volte convenienti. La notazione

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ci dice che la funzione g accetta coppie di numeri reali come ingresso e produce un numero reale come uscita. Se vogliamo specificare la legge con cui g trasforma ingressi in uscite, possiamo scrivere

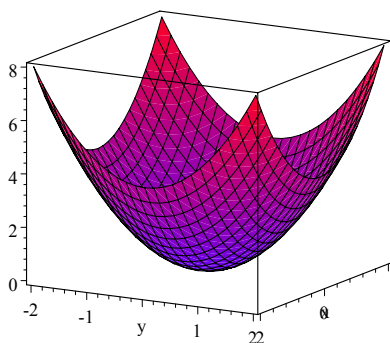
$$g : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

Entrambe queste notazioni ci dicono che una funzione parte con un ingresso (una coppia di numeri, in questo caso) e finisce con un'uscita (un numero in questo caso).

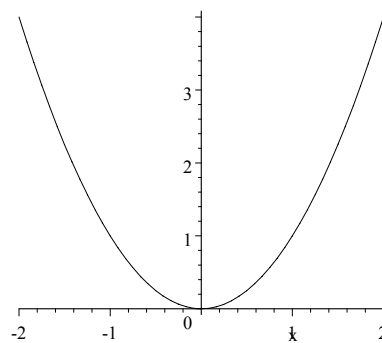
4.3.2 Grafici

Consideriamo ancora la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$. Il suo grafico è l'insieme dei punti (x, y, z) di \mathbb{R}^3 per i quali $z = g(x, y) = x^2 + y^2$. Per esempio, poiché $g(2, 1) = 5$, il punto $(2, 1, 5)$ fa parte del grafico di g .

Ecco, riportato sotto, una porzione di tale grafico con accanto il grafico del suo "analogo" in una variabile



Il Paraboloido $z = x^2 + y^2$.



La Parabola $y = x^2$.

Il grafico di g , chiamato **paraboloide**, è apparentemente piuttosto diverso da quello della parabola. Il grafico di g è una superficie bidimensionale¹ nello spazio \mathbb{R}^3 . Come regola potremmo dire che la dimensione del grafico di una funzione è uguale al numero delle variabili indipendenti che definiscono la funzione stessa (Questo regola è vera per quasi tutte le funzioni che si incontrano in questi corsi di analisi. Esistono, comunque, alcune funzioni "strane" che violano questa regola)

4.3.3 Attenzione ai Grafici ...

I grafici sono di grande importanza nel riuscire ad intuire le proprietà di una funzione. Lo sono per funzioni di una variabile, ed ancor di più per funzioni di più variabili. D'altra parte, come è facile intuire, disegnare in modo efficace un grafico che sta in \mathbb{R}^3 su un foglio di carta non è banale. Per questo, oltre a capire qual'è la prospettiva migliore per disegnare un grafico, occorre cercare altri modi, altre forme di rappresentazione del grafico, che ci permettano almeno di intuirne la forma.

Curve di Livello e Mappe.

Tutti voi avrete letto almeno una volta una buona carta geografica. Avrete immediatamente notato, che oltre ad indicare località, monti, laghi, fiumi, strade, sentieri e quant'altro, nella carta sono rappresentate delle linee chiuse con segnata accanto una cifra, chiamate *curve di livello*. Quelle linee indicano quale parte di territorio ha una certa altezza sul livello del mare. Così, ad esempio, la curva 100 indica quali sono le parti di territorio aventi una elevazione di 100 metri sul livello del mare.

Queste curve ci permettono di leggere meglio il territorio descritto dalla carta, di visualizzare i dislivelli, di capire meglio (se per esempio siamo in montagna) la fatica che faremo seguendo un sentiero, leggendone non solo la lunghezza, ma anche il dislivello complessivo ed anche i punti più faticosi, perché in maggior pendenza.

E' come se si sezionasse il territorio a varie altezze e poi si proiettasse sul piano (la carta geografica) i contorni delle sezioni fatte.

Una procedura simile è estremamente efficace anche nello studiare le funzioni, l'idea è ancora quella di sezionare il grafico ad una certa altezza e riportare poi il contorno della sezione ottenuta sul piano. Formalizziamo

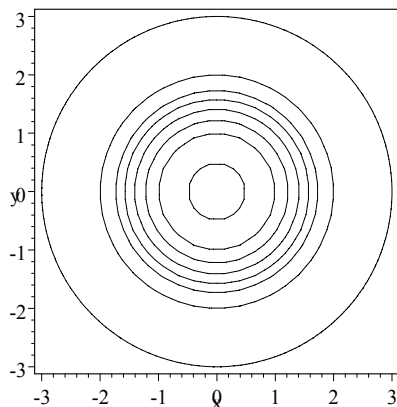
¹bidimensionale per noi vuole dire che "per qualcuno che cammina su esso il grafico di g appare come un piano" esattamente come la superficie della Terra appare piatta a noi che ci viviamo sopra.

Definizione 4.8 Siano $f(x, y)$ una funzione e c una costante. L'insieme dei punti (x, y) per i quali $f(x, y) = c$ è chiamata **curva di livello** di f . Una collezione di curve di livello è anche detta **mappa di contorno** (o **mappa**) di f

Esempio 4.9 Consideriamo ancora la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$. Vogliamo scrivere le curve di livello per g . Esse sono rappresentate dall'insieme delle coppie (x, y) del piano tali che $g(x, y) = c$. Cioè

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}.$$

E' chiaro che esse rappresentano circonferenze centrate nell'origine e di raggio \sqrt{c} se $c > 0$, l'origine $(0, 0)$ se $c = 0$, l'insieme vuoto se $c < 0$. Quest'ultimo dato esprime banalmente il fatto che la somma di due quadrati non può essere negativa. Vediamo una mappa di contorno.



Curve di livello di $g(x, y) = x^2 + y^2$

4.3.4 Esercizi

1. Trovare dominio e rango delle seguenti funzioni.

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4$;

(b) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$;

(c) $h(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

(d) $k(x, y) = y^2 - x^2$;

(e) $l(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. Data la funzione $f(x, y) = y - x^2$ valutare e tracciare le curve di livello $z = -4, -3, \dots, 3, 4$ nel quadrato $[-4, 4] \times [-4, 4]$.

Fare la stessa cosa con la funzione $f(x, y) = x - y^2$.

Cercare di valutare i due risultati cominciando a pensare in termini di simmetrie.

Provare ad usare gli strumenti di laboratorio per disegnare i grafici.

3. Sia $g(x, y) = x^2 + y^2$ e $h(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Valutare e disegnare, per ognuna delle due funzioni, le curve di livello $z = -4, -3, \dots, 3, 4$ nel quadrato $[-4, 4] \times [-4, 4]$. Valutare i due risultati e confrontarli.

4. Sia $f(x, y) = 2x - 3y$ una funzione lineare. Valutare e disegnare, per ognuna delle due funzioni, le curve di livello $z = -5, -4, \dots, 4, 5$ nel quadrato $[-4, 4] \times [-4, 4]$. Quale è la forma delle curve di livello?

Fare la stessa cosa per la funzione $g(x, y) = -2x + 3y$.

5. Siano $f(x, y) = 2 + x^2$ e $g(x, y) = 2 + y^2$. Valutare e disegnare, per ognuna delle due funzioni, le curve di livello $z = -2, 0, 2, 4, 6, 8$ nel quadrato $[-4, 4] \times [-4, 4]$. Quale forma hanno? Quali sono le similitudini e le differenze nei due casi? Che cosa rappresenta il grafico delle due funzioni? Come questo si riflette sulle curve di livello? Cercare di fare le stesse operazioni di cui sopra usando i mezzi di laboratorio.

6. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come la distanza dei punti del piano dall'origine.

(a) Trovare dominio e rango di f ;

(b) Disegnare il grafico di f .

(c) Disegnare le curve di livello di f ; Se ne può dedurre una qualche forma di simmetria?

7. Per ogni punto (x, y) del piano sia $f(x, y)$ la distanza del punto (x, y) dalla retta $x = 1$.
- (a) Scrivere la formula per f ;
 - (b) Disegnare il grafico di f ;
 - (c) Tracciare la curva di livello passante per $(3, 4)$;
 - (d) Tutte le curve di livello di f hanno la stessa forma, come mai?

4.4 Derivate Parziali

Sia f una funzione di una sola variabile. Ricordiamo alcune proprietà note delle derivate.

Tangente. Per ogni elemento x_0 per il quale la derivata è definita, il valore della derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. In particolare, il segno della derivata nel punto ci dice se la funzione è crescente o meno.

Velocità. La derivata f' può essere inoltre interpretata nel seguente modo: $f'(x_0)$ ci dice qual'è il tasso di variazione della funzione nel punto. Se f dà la posizione al tempo x di un oggetto che si muove, allora $f'(x)$ ci dà la corrispondente velocità al tempo x .

Limite. La derivata $f'(x)$ è definita come il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Approssimazione lineare. Nel punto $(x_0, f(x_0))$ sulla curva $y = f(x)$, la retta tangente ha come coefficiente angolare $f'(x_0)$. L'espressione della retta tangente è data da

$$y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La funzione L è anche l'**approssimazione lineare** di f in x_0 . In simboli

$$L(x) \approx f(x) \quad \text{quando} \quad x \approx x_0 .$$

4.4.1 Derivate in Più Variabili.

La definizione di derivata, per funzioni di più variabili, è, come facilmente intuibile, più complicata. Per esempio, l'interpretazione di tangente: nel caso di funzioni di una variabile descrive completamente la "pendenza" della funzione nel punto. Il grafico di una funzione di due variabili è, come abbiamo visto una superficie, e non possiamo perciò parlare di pendenza. In un punto della superficie la "pendenza" dipende dalla direzione in cui ci si sposta dal punto.

Per dirla in altre parole, non basta conoscere come cambia in una direzione per approssimare localmente il grafico, bisogna sapere come varia relativamente a "tutte" direzioni uscenti dal punto. Come vedremo più avanti è

l'idea di approssimazione lineare l'idea corretta che può essere generalizzata dal caso di una variabile a quella di più variabili.

Per fare ciò, partiamo estendendo l'idea di derivata per le funzioni di più variabili. Le **derivate parziali** che introduciamo qui, nel caso multivariabile, sono il più semplice analogo delle derivate ordinarie.

Idea: Dato un punto (x_0, y_0) nel dominio, facciamo variare una sola variabile, tenendo costante l'altra. Otteniamo così una funzione di una sola variabile, rispetto alla quale possiamo usare gli strumenti noti dall'analisi delle funzioni di una sola variabile.

Esempio 4.10 Sia $f(x, y) = x^2 - 3xy + 6$. Supponiamo la funzione costante rispetto alla variabile y . Indichiamo con $f_x(x, y)$ la derivata fatta rispetto alla variabile x , si ha

$$f_x(x, y) = 2x - 3y.$$

Analogamente, se supponiamo la funzione costante rispetto ad x e indichiamo con $f_y(x, y)$ la derivata rispetto alla variabile y si ha

$$f_y(x, y) = -3x.$$

Se volessimo valutare queste due derivate per es. nel punto $(1, 2)$ si ha $f_x(2, 1) = 4 - 3 = 1$, $f_y(2, 1) = -6$

Dal punto di vista del calcolo la valutazione è stata molto semplice, quello che dobbiamo chiederci è il significato che ha l'operazione fatta ed il risultato ottenuto. Per esempio, cosa ci dicono le due "derivate" calcolate nel punto $(2, 3)$ riguardo al comportamento della f intorno al punto $(2, 1)$? Come interpretare il risultato dal punto di vista grafico e numerico? Cominciamo ad interpretare ciò che abbiamo fatto.

Mantenere una variabile costante. Per trovare, quelle che abbiamo denominato derivate parziali, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, abbiamo, nel primo caso, considerato la variabile y come costante, nell'altro x come costante.

Questo produce una funzione di una sola variabile. Vediamo infatti, che se in $f(x, y)$ poniamo $y = 1$ si ha $f(x, 1) = x^2 - 3x + 6$ e la derivata di questa funzione è $2x - 3$, che valutata in $x = 2$ ci dà il valore -1 in accordo a quanto trovato sopra.

Tasso di variazione Le derivate parziali (così come le derivate ordinarie) possono essere interpretata come tangente o rapidità di variazione, con l'accortezza di capire che per una funzione $f(x, y)$ la derivata parziale rispetto ad x nel punto (x_0, y_0) , $f_x(x_0, y_0)$ ci dice come cambia la funzione f rispetto alla variabile x . Cioè come varia la f quando ci si sposta dal punto

(x_0, y_0) muovendosi lungo una direzione parallela all'asse x .

L'altra derivata parziale $f_y(x_0, y_0)$ ci dice come cambia la f spostandosi dal punto (x_0, y_0) muovendosi lungo una direzione parallela all'asse y .

Esempio 4.11 La funzione $f(x, y) = x^2 - 3xy + 6$ ha derivate parziali $f_x(x, y) = 2x - 3y$, $f_y(x, y) = -3x$. Cosa ci dice questo sulla variazione di f nei punti $(x, y) = (2, 1)$ e $(x, y) = (1, 2)$?

Soluzione. Cominciamo col considerare il punto di coordinate $(2, 1)$. Le formule per le derivate parziali ci hanno dato $f_x(2, 1) = 1$ e $f_y(2, 1) = -6$. Questi valori rappresentano la rapidità di variazione di f rispetto ad x ed y nel punto $(2, 1)$ rispettivamente. Scriviamo una tavola di valori di f "centrati" nel punto $(2, 1)$.

Valori di $f(x, y) = x^2 - 3xy + 6$ nell'intorno di $(2, 1)$

| y/x | 1,97 | 1,98 | 1,99 | 2,00 | 2,01 | 2,02 | 2,03 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1,03 | 3,7936 | 3,8022 | 3,8110 | 3,8200 | 3,8292 | 3,8386 | 3,8482 |
| 1,02 | 3,8527 | 3,8616 | 3,8707 | 3,8800 | 3,8895 | 3,8992 | 3,9091 |
| 1,01 | 3,9118 | 3,9210 | 3,9304 | 3,9400 | 3,9498 | 3,9598 | 3,9700 |
| 1,00 | 3,9709 | 3,9804 | 3,9901 | 4,000 | 4,0101 | 4,0204 | 4,0309 |
| 0,99 | 4,0300 | 4,0398 | 4,0498 | 4,0600 | 4,0704 | 4,0810 | 4,0918 |
| 0,98 | 4,0891 | 4,0992 | 4,1095 | 4,1200 | 4,1307 | 4,1416 | 4,1527 |
| 0,97 | 4,1482 | 4,1586 | 4,1692 | 4,1800 | 4,1910 | 4,2022 | 4,2136 |

Leggendo la colonna per $x = 2$ (ad ogni passo y aumenta di 0,01) si nota che ad ogni passo successivo i corrispondenti valori di f diminuiscono di circa 0,06. Questo ci conforta nel fatto che la rapidità di variazione sia -6 . In modo simile il fatto che $f_x(2, 1) = 1$ suggerisce che i valori di $f(x, 1)$ debbano aumentare alla stessa rapidità di x quando $x \approx 2$. Se si legge la variazione nella riga per $y = 1$ si trova confermata questa tesi. ■

Definizioni Formali

Definiamo le derivate parziali, in modo analogo a quanto fatto per le funzioni di una variabile, come limiti dei rapporti incrementali che si ottengono variando una variabile, mentre si tiene costante l'altra

Definizione 4.12 Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili. La derivata parziale di f rispetto ad x , nel punto (x_0, y_0) , indicata con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, è

definita da:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se il limite esiste.

Analogamente, la derivata parziale di f rispetto ad y , nel punto (x_0, y_0) , viene indicata con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, ed è data da

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

se il limite esiste.

Nota 4.13 *E' d'uopo ricordare che condizione necessaria perché i limiti della definizione esistano è che la funzione $f(x, y)$ sia definita sia nel punto (x_0, y_0) che nei punti (x, y) vicini. In particolare non vi sono problemi se la funzione è definita in un intorno del punto stesso.*

E' altresì ovvio che l'esistenza di uno dei due limiti non implica necessariamente l'altro. Si possono cioè avere funzioni che ammettono derivata parziale rispetto ad x ma non rispetto ad y o viceversa.

Nota 4.14 *La notazione $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ non è l'unica che viene usata per indicare la derivata parziale rispetto ad x della funzione $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) . Useremo indifferentemente anche il simbolo $f_x(x_0, y_0)$, ed anche a volte, se scriviamo $z = f(x, y)$ indicheremo la derivata parziale con il simbolo $z_x(x_0, y_0)$.*

Useremo inoltre i vari simboli $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x , z_x per indicare, in modo generico la funzione derivata parziale rispetto ad x .

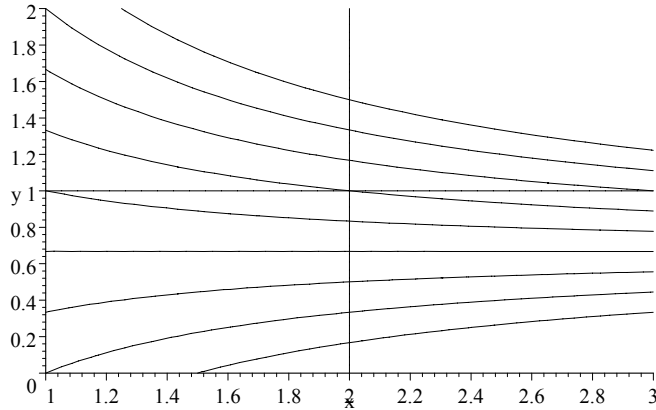
Ovviamente quanto detto per la derivata rispetto alla variabile x vale anche per quanto riguarda la derivata fatta rispetto alla variabile y .

4.4.2 Derivate Parziali e Mappe di Contorno.

Abbiamo visto, in un esempio precedente, come stimare, in un punto, le derivate parziali da una tabella che esprimeva i valori della funzione. Si può fare una cosa analoga usando le mappe di contorno. Pensando alle derivate parziali f_x , f_y come rapidità di variazione si può usare la mappa di contorno per valutare quanto rapidamente $z = f(x, y)$ cresce o decresce nelle vicinanze del punto (x_0, y_0) quando x o y variano.

Esempio 4.15 Consideriamo la mappa di contorno della funzione $f(x, y) = x^2 - 3xy + 6$ centrata in $(2, 1)$.

Vediamo come usarla per stimare le derivate parziali



Curve di livello di $f(x, y) = x^2 - 3xy + 6$

Le curve di livello rappresentate sono quelle per valori interi di $z = f(x, y)$ da 1 fino a 9.

Esaminiamo da prima $f_x(2, 1)$. Si nota subito che al crescere di x la funzione aumenta valore, inoltre si vede che $f(2.1, 1) \approx 4.1$ che suggerisce che $f_x(2, 1) \approx 1$. Per quanto riguarda $f_y(2, 1)$ si nota da prima che al crescere di y la funzione decresce il proprio valore, inoltre si ha che $f(2, 1.1) \approx 3.4$ con un diminuzione di 0.6 che suggerisce che $f_y(2, 1) \approx -6$.

4.4.3 Derivate Parziali ed Approssimazioni Lineari.

L'idea dell'approssimazione lineare, per funzioni di due o più variabili, è essenzialmente la stessa che per funzioni di una variabile. Data una funzione $f(x, y)$ ed un punto (x_0, y_0) nel dominio di f , si cerca una funzione lineare $L(x, y)$ che ha lo stesso valore e le stesse derivate della funzione f nel punto (x_0, y_0) . In altre parole, vogliamo una funzione lineare tale che

$$L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \quad L_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0), \quad L_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).$$

Per una funzione di due variabili il grafico dell'approssimazione lineare è chiamato **piano tangente**. Cercheremo di illustrare e riassumere le idee con il prossimo esempio

Esempio 4.16 Trovare l'approssimazione lineare L della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Soluzione. Le derivate parziali della funzione sono rispettivamente

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y.$$

Se valutiamo f e le due derivate parziali nel punto $(2, 1)$ otteniamo

$$f(2, 1) = 5, \quad f_x(2, 1) = 4, \quad f_y(2, 1) = 2$$

Cerchiamo una funzione lineare che assuma i valori trovati. Scriviamo dapprima L nella forma generale

$$L(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$$

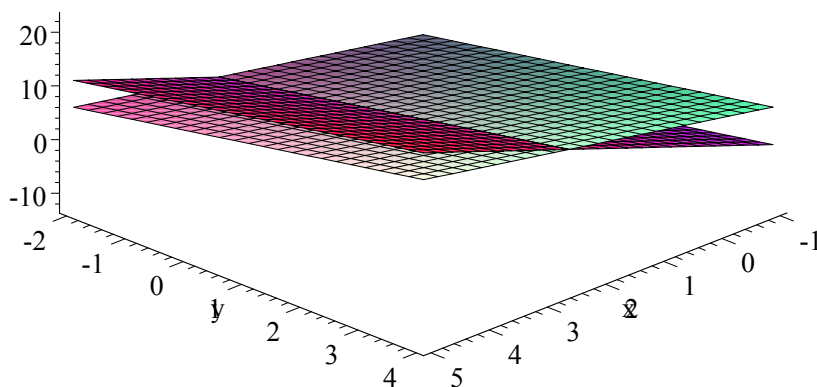
e cerchiamo poi i valori appropriati per a , b , c sapendo che $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Poiché $L(x, y) = a(x - 2) + b(y - 1) + c$ si ha:

$$L(2, 1) = c, \quad L_x(2, 1) = a, \quad L_y(2, 1) = b$$

da cui risulta immediatamente che deve allora essere $c = 5$, $a = 4$, $b = 2$, così che

$$L(x, y) = 4(x - 2) + 2(y - 1) + 5.$$

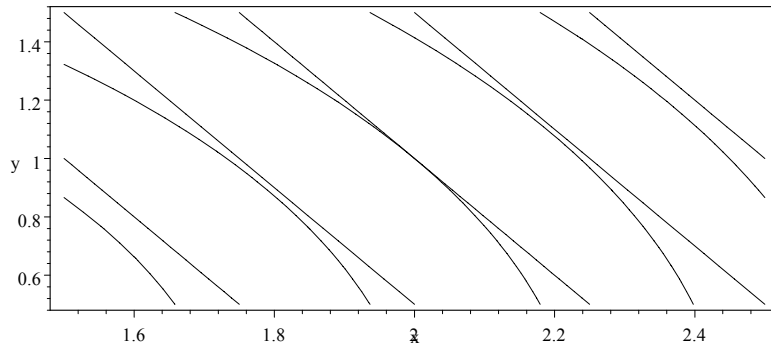
Vediamo nel grafico qua sotto come stanno tra loro i grafici di f e di L



I grafici di f e di L nell'intorno di $(2, 1)$



Il disegno illustra le "nozioni" di **piano tangente** e di **approssimazione lineare**. Il piano $L(x, y) = 4(x - 2) + 2(y - 1) + 5$ tocca la superficie $z = f(x, y)$ nel punto di coordinate $(2, 1, 5)$. In questo punto, inoltre, il piano rappresenta la "miglior approssimazione lineare" alla superficie nel punto dato. Possiamo cogliere questo dato anche guardando, nell'intorno del punto $(2, 1)$, come stanno tra loro le mappe di contorno delle due funzioni



Curve di livello di f e di L

La procedura usata nell'esempio precedente funziona nello stesso modo anche per funzioni di più variabili, purché la funzione ammetta derivate parziali nel punto considerato. Si riporta di seguito la definizione per due e tre variabili, ricordando che l'idea vale anche per un numero di variabili superiore

Definizione 4.17 (Approssimazione lineare). Siano $f(x, y)$ e $g(x, y, z)$ funzioni, e supponiamo che tutte le derivate parziali delle due funzioni esistano.

L'approssimazione lineare di f nel punto (x_0, y_0) è la funzione

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

L'approssimazione lineare di g nel punto (x_0, y_0, z_0) è la funzione

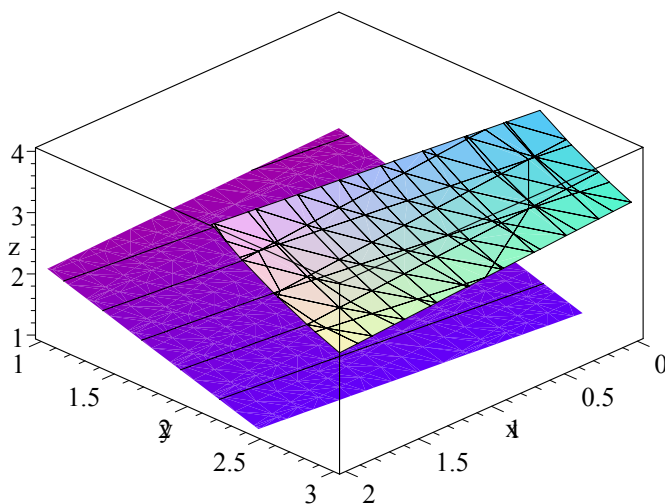
$$L(x, y, z) = g(x_0, y_0, z_0) + g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$$

Esempio 4.18 Trovare l'approssimazione lineare di $g(x, y, z) = x + yz^2$ nel punto $(1, 2, 3)$.

Soluzione. E': $g(1, 2, 3) = 19$, $g_x(1, 2, 3) = 1$, $g_y(1, 2, 3) = 9$, $g_z(1, 2, 3) = 12$. L'approssimazione lineare ha quindi la forma

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= g_x(1, 2, 3)(x - 1) + g_y(1, 2, 3)(y - 2) + g_z(1, 2, 3)(z - 3) + g(1, 2, 3) \\ &= (x - 1) + 9(y - 2) + 12(z - 3) + 19. \end{aligned}$$

■



Superfici di livello di g e L

4.4.4 Esercizi

1. Per ogni funzione trovare le derivate parziali rispetto ad ogni variabile.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

(b) $f(x, y) = x^2 y^2$;

(c) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$;

(d) $f(x, y) = \cos(xy)$;

(e) $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$;

(f) $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cos(y)}$;

(g) $f(x, y) = x y^2 z^3$;

(h) $f(x, y) = \cos(xyz)$.

2. Trovare l'approssimazione lineare nel punto $(1, 1)$ per le funzioni (a), (b), (c); nel punto $(0, 0)$ per le funzioni (d), (e), (f); nel punto $(1, 1, 1)$ per (g) e nel punto $(0, 0, 0)$ per (h). Controllate le risposte graficamente disegnando f ed L .

3. Traccia la mappa di contorno per le seguenti funzioni nei domini indicati.

(a) $f(x, y) = \cos(y)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-2 \leq y \leq 2$;

(b) $f(x, y) = 2x - 3y$, $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$;

(c) $f(x, y) = xy$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$;

(d) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.

4. Usando Maple controllare le mappe di contorno disegnate.

5. Supponiamo che di una funzione g si conoscano $g(3, 4) = 5$, $g_x(3, 4) = 3/5$, $g_y(3, 4) = 4/5$ e $g(4, 5) = \sqrt{40}$.

(a) Trovare la miglior approssimazione lineare L di g nel punto $(3, 4)$.

(b) Usare L per stimare $g(2.9, 4.1)$ e $g(4, 5)$.

(c) Potrebbe g essere una funzione lineare? Motivare la risposta.

6. Sia $f(x, y) = |x| \cos y$.

- (a) Esistono le derivate parziali di f nel punto $(0, 0)$?
 - (b) Dopo aver dato una risposta analitica provare a disegnare la funzione in un intorno di $(0, 0)$.
7. Sia $g(x, y) = |x| \sin y$.
- (a) Esistono le derivate parziali di g nel punto $(0, 0)$?
 - (b) Dopo aver dato una risposta analitica provare a disegnare la funzione in un intorno di $(0, 0)$.

4.5 Ottimizzazione e Derivate parziali: Un Primo Approccio.

Se una funzione di una variabile $x \rightarrow f(x)$ ha un massimo od un minimo relativo nel punto x_0 allora la derivata della funzione nel punto (se esiste) deve valere zero in x_0 . Se una funzione di due variabili $f(x, y)$ ha un massimo o un minimo locale nel punto (x_0, y_0) , allora **entrambe la derivate parziali** (se esistono) devono annullarsi, cioè

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

In altre parole (x_0, y_0) è un **punto stazionario** di f .

Sebbene il risultato risulti plausibile, dobbiamo chiederci perché è vero. Consideriamo allora, per fissare le idee, il caso di un massimo locale. Geometricamente, la superficie $z = f(x, y)$ ha un "massimo" relativamente al punto del dominio (x_0, y_0) . Se sezioniamo questa superficie con un qualunque piano passante per il punto (x_0, y_0) , per esempio il piano $y = y_0$, la curva risultante, la curva cioè che si ottiene come intersezione tra la superficie $z = f(x, y)$ ed il piano $y = y_0$ ha equazione $z = f(x, y_0)$ e questa curva ha un "massimo" nel punto x_0 . Dalla teoria delle funzioni di una variabile sappiamo che, se la funzione $x \rightarrow f(x, y_0)$ è differenziabile, allora la sua derivata deve essere zero in x_0 .

$$\frac{dz}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0) = 0$$

Per analoghe ragioni si ha, ovviamente, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Possiamo riassumere quanto detto nel seguente Teorema

Teorema 4.19 (Punti estremi e derivate parziali) *Sia (x_0, y_0) un punto di massimo od un minimo locale per $f(x, y)$, interno al dominio di definizione della funzione stessa. Se esistono entrambe la derivate parziali, allora*

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

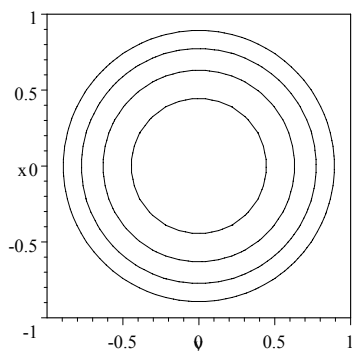
ATTENZIONE ... Il teorema è importante anche per ciò che *non dice*. Il teorema *non garantisce*, in particolare, che in un punto stazionario la funzione ammette un massimo od un minimo locale. Il prossimo esempio mostra entrambe le due facce della medaglia

Esempio 4.20 *Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g = xy$. Trovare i punti stazionari di entrambe le funzioni.*

Soluzione. Trovare le derivate parziali è semplice:

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y, \quad g_x(x, y) = y, \quad g_y(x, y) = x.$$

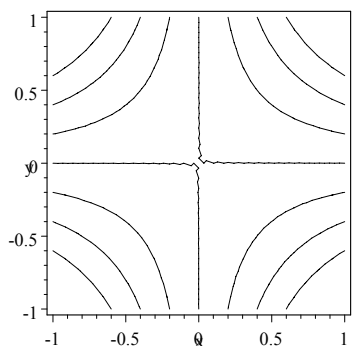
Sia f che g hanno quindi come unico punto stazionario l'origine $(0, 0)$. Per f l'origine è chiaramente un minimo, poiché si ha che $x^2 + y^2 \geq 0$ per ogni coppia (x, y) . Per quanto riguarda g invece, l'origine non è né massimo, né minimo poiché $g(x, y)$ assume sia valori positivi che negativi intorno all'origine. Le mappe di contorno di f e g illustrano il loro diverso comportamento nell'intorno dell'origine.



Mappa di contorno di f

I valori di z sono 0.2, 0.4, 0.6, 0.8.

Le curve di livello sono circonferenze centrate nell'origine. Il disegno ci fa capire che f ha un *minimo locale* nel punto stazionario $(0, 0)$. Non solo ma poiché $f(0, 0) = 0$, e $f(x, y) > 0$ per ogni coppia $(x, y) \neq (0, 0)$ abbiamo che il punto $(0, 0)$ è anche un minimo assoluto. ■



Mappa di contorno per g

I valori di z sono $-0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6$.

Le curve di livello mostrano una "sella". La superficie sale sopra zero nel primo e terzo quadrante, e scende sotto lo zero nel secondo e quarto quadrante.

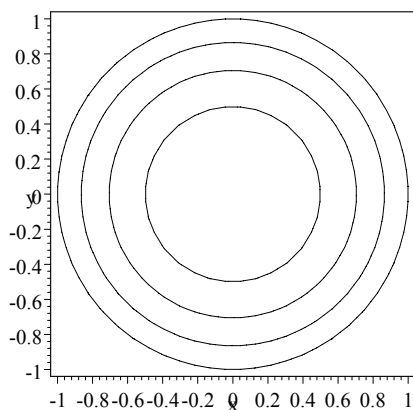
Differenti tipi di punti stazionari. Come si è notato la strategia che si usa per trovare massimi e minimi per funzioni di più variabili è la stessa che nel caso di una variabile - *trovare i punti stazionari e analizzare le loro caratteristiche* - ma la metodologia può essere più complicata, in parte per la maggior difficoltà di calcolo, dall'altra perché le funzioni di più variabili possono avere un comportamento più complesso nell'intorno di un punto stazionario.

Individueremo *tre diversi tipi di punti stazionari*

Punto di minimo locale. Un punto stazionario (x_0, y_0) è un punto di **minimo locale** per la funzione f se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ in tutti i punti in un intorno di (x_0, y_0) . Da un punto di vista formale scriveremo che (x_0, y_0) è un punto di **minimo locale** se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \forall (x, y) : |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$. In questo caso diremo che f **assume un valore di minimo locale in** (x_0, y_0) . Nell'esempio precedente $(0, 0)$ è un minimo locale per la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Punto di massimo locale. Un punto stazionario (x_0, y_0) è un punto di **massimo locale** per la funzione f se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ in tutti i punti in un intorno di (x_0, y_0) . Da un punto di vista formale scriveremo che (x_0, y_0) è un punto di **massimo locale** se $\exists \delta > 0$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \forall (x, y) : |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$. In questo caso diremo che f **assume un valore di massimo locale in** (x_0, y_0) . Un esempio di tale situazione è il punto $(0, 0)$ per la funzione $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

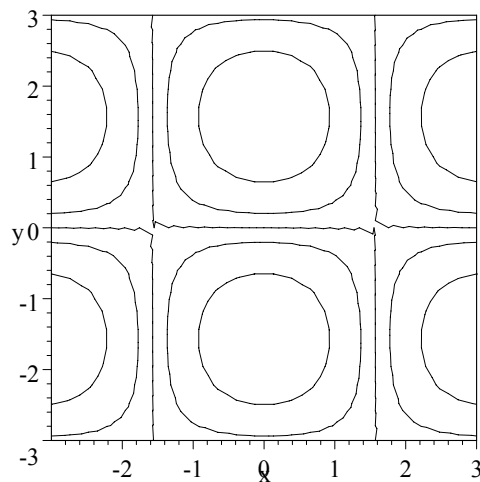
Disegniamo le curve di livello di $z = 1 - x^2 - y^2$ per valori di z uguali a $0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$

Mappa di contorno di $1 - x^2 - y^2$

Punto di sella. Un punto stazionario (x_0, y_0) è un punto di **sella** per la funzione f se f non assume né un minimo locale, né un massimo locale in (x_0, y_0) . Un esempio di tale situazione è il punto $(0, 0)$ per la funzione $g(x, y) = xy$ vista sopra.

Vediamo, con un esempio, come queste tre possibilità possano coesistere vicine tra loro. La funzione in questione è $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$

Disegniamo la mappa di contorno di f per i seguenti valori: $\cos(x) \sin(y) = -0.6, -0.2, 0, 0.2, 0.6$

Mappa di contorno di $\cos(x) \sin(y)$

Ottimizzazione: Continua

Abbiamo appena accennato il problema di trovare massimi, minimi e selle per funzioni di più variabili. Ci sono, come nel caso di una variabile altri problemi da affrontare. Ecco due questioni su cui torneremo più tardi.

Test della derivata seconda. Nel caso di funzioni di una sola variabile il test del valore della derivata seconda f'' viene spesso usato per classificare i punti di massimo, minimo e di flesso. Per esempio se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale per f . Un approccio simile, ma più sofisticato è possibile anche per funzioni di due o più variabili. Vedremo come si opera nel Capitolo 6.

Estremi al bordo. Ricordiamo cosa accade per una funzione di una variabile continua e derivabile, definita in un intervallo chiuso $[a, b]$. La $f(x)$ può assumere il suo massimo o minimo (assoluto) sia in un punto stazionario in cui la derivata prima è zero ($f'(x) = 0$), o agli estremi $x = a$, o $x = b$.

La situazione è simile per funzioni di due o più variabili definita in una regione chiusa. Analizziamo per semplicità il caso di due variabili. La $f(x, y)$ può assumere il suo massimo o minimo (assoluto) sia in un punto stazionario in cui le derivate parziali sono entrambe zero ($f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$) o sul bordo della regione che in questo caso non sono semplicemente due punti ma una curva chiusa del piano. Illustriamo la situazione, per rendere l'idea in un caso semplice.

Esempio 4.21 Dove, nel rettangolo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ la funzione $g(x, y) = xy$ assume i suoi valori massimo e minimo?

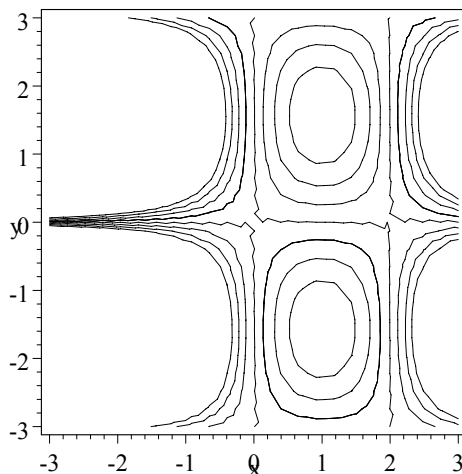
Soluzione. Abbiamo già visto che la funzione g ha all'interno un solo punto stazionario $(0, 0)$ e che questo punto è una sella. Allora il massimo e minimo (assoluti) devono essere sul bordo di R . Un'occhiata alla mappa di contorno ci mostra la simmetria del grafico e ci permette di vedere cosa succede su un pezzo del contorno, ad esempio $x = 1$, per poi estrapolare il comportamento sul resto del bordo. Così, per $x = 1$ la funzione g si comporta come una funzione di una variabile $g(1, y) = y$. Chiaramente il massimo si ha per $y = 1$ e vale 1, il minimo si ottiene per $y = -1$ e vale -1 . Concludiamo allora che $g(-1, -1) = g(1, 1) = 1$ e $g(-1, 1) = g(1, -1) = -1$ rappresentano il massimo ed il minimo (assoluto) per g su R . ■

4.5.1 Esercizi

1. Sia $g(x, y) = xy$. Guardando la mappa di contorno si nota che se si segue un cammino rettilineo dal basso a sinistra in alto a destra, l'origine sembra un minimo. Viceversa, se si segue un cammino rettilineo da destra in basso a sinistra in alto, l'origine sembra essere un massimo.
 - (a) Cosa accade se si segue un cammino rettilineo dal punto $(0, -1)$ al punto $(0, 1)$? Come cambiano i valori della funzione?
 - (b) Cosa accade invece se si segue un cammino rettilineo dal punto $(0.5, -1)$ al punto $(0.5, 1)$? Come cambiano i valori della funzione? Qual'è in questo caso il massimo? Quanto vale?

2. Guardate la mappa di contorno di $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$.
 - (a) La superficie $z = f(x, y)$ sembra un cartone per uova. Dove vanno le uova (dove sono i minimi)?
 - (b) Usando la figura stimate le coordinate dei punti di massimo, di minimo e di sella.
 - (c) Usare la formula $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$ per trovare (in modo esatto) tutti i punti stazionari nel rettangolo $[-3, 3] \times [-3, 3]$
 - (d) Trovare il valore massimo e minimo di $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$ nel rettangolo $[-3, 3] \times [-3, 3]$.

3. Sia $f(x, y) = x(x - 2) \sin(y)$. Qui sotto è disegnata una mappa di contorno nell'insieme $R = [-3, 3] \times [-3, 3]$



Mappa di contorno di f

I valori di z sono $z = 0, \pm 1/4, \pm 1/2, \pm 3/4, 1$ (disegnarli sul grafico!).

- (a) La funzione ha due punti stazionari lungo la linea $x = 1$. Usare la figura per stimare le loro coordinate. Che tipi di punti stazionari sono?
 - (b) Ci sono quattro punti stazionari in R . Trovarli usando la formula per f .
 - (c) La mappa di contorno mostra che la funzione assume il valore massimo o minimo sul bordo dell'insieme R . Trovare questi valori [**Sugg.:** se $x = 3$ allora $f(3, y) = 3 \sin(y)$. Questa è una funzione di una variabile definita nell'intervallo $-3 \leq y \leq 3$]
4. Per ogni funzione qui sotto trovare i punti stazionari. Decidere di che tipo sono usando gli strumenti tecnologici (mappa di contorno o grafico della superficie).
- (a) $f(x, y) = -x^2 - y^2$;
 - (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
 - (c) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$;
 - (d) $f(x, y) = xy - y - 2x + 2$.
5. Consideriamo la funzione lineare $L(x, y) = 1 + 2x + 3y$. L ammette punti stazionari? Se sì, di che tipo, se no, perché?
6. Considerate la funzione lineare $L(x, y) = a + bx + cy$ dove a, b, c , sono costanti.
- (a) Il grafico di L è un piano. Quali piani hanno punti stazionari e quali sono le loro equazioni?
 - (b) Sotto quali condizioni per a, b, c , L ha punti stazionari? In questo caso quali sono? Confronta la risposta con (a).
7. Sia $f(x, y) = x^2$. Il grafico di f è un cilindro senza restrizioni rispetto alla variabile y .
- (a) Usare gli strumenti tecnologici per disegnare la superficie $z = f(x, y)$ e dire quali sono i punti stazionari nel piano x, y ? Di che tipo sono? [**Sugg.:** c'è una intera linea di punti stazionari].
 - (b) Usare le derivate parziali di f per trovare i punti stazionari. Confronta la risposta con (a).

8. Dare un esempio di funzione che abbia le proprietà descritte sotto
[**sugg.:** (1) guarda l'esercizio precedente; (2) controlla la tua risposta disegnando il grafico.
- (a) Una funzione $g(x, y)$ per la quale ogni punto dell'asse x sia un minimo locale;
 - (b) Una funzione $h(x, y)$ per la quale ogni punto della linea $x = 1$ sia un massimo locale;
 - (c) Una funzione non-costante $h(x, y)$ che ha un minimo locale nel punto $(3, 4)$.