

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 21 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

Dinamica

→ Eq. Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, l$

$$L = K - V$$

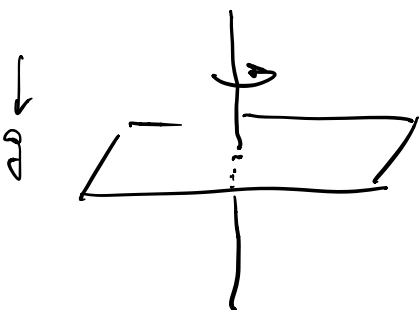
→ Equazioni
Condizioni
della Dinamica

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}^e = \underline{\dot{P}} \\ \underline{M}'(G) = \frac{d}{dt} \underline{L}(G) \end{array} \right.$$

ECD $\leadsto$

- Rigido con uno fuso
- Precessione e moto libero di un rigido

Esempi

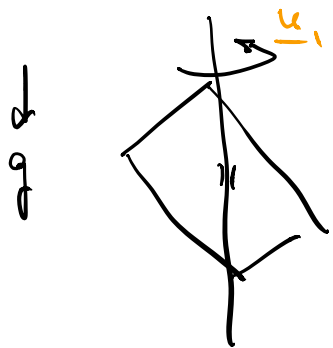


asse fisso
è API
 $\rightarrow \dot{\omega} = 0$
 $\omega = \text{costante}$

T + attrito

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{\gamma}{J_3} t}$$

J_3 momento
di inerzia



↑ am ma e API

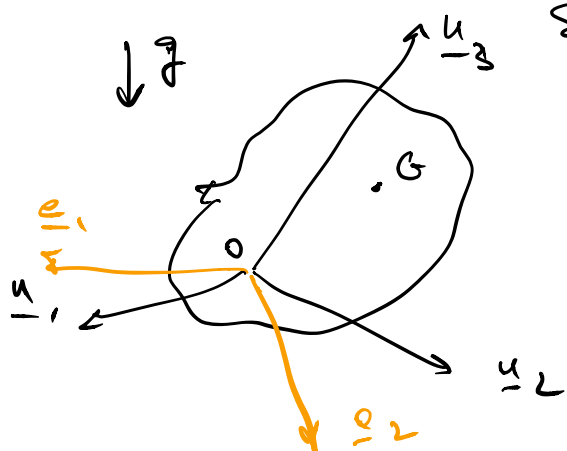
$$I_{11} \dot{\omega} = 0$$

eq. di moto

$$\underline{p}^a \cdot \underline{u}_2 = \underline{I}_{12} \dot{\omega}$$

$$\underline{p}^a \cdot \underline{u}_3 = \underline{I}_{12} \omega^2$$

momenti di reazione



Sistema solido $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$

Sistema fuso $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 = \underline{u}_3$

$$\begin{cases} M \underline{g} + \underline{T}_O = \underline{\dot{P}} \\ (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge M \underline{g} + \underline{p}_O = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) \end{cases}$$

eq. diff per φ

Conservazione dell'energia $E = K + V$

Precessione e moto libero di un rigido

Consideriamo un rigido con un punto fisso O (vincolo liscio) $\rightarrow$ 3 gradi di libertà

ECD

$$\begin{cases} \underline{M}(O) = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) \\ \underline{R}^a + \underline{T}_O = \underline{\dot{P}} \end{cases}$$

O fisso non ci sono momenti di reazione

$F_{-0}^2 \rightarrow$ variazioni incognite

1° : 3 eq. del moto

2° : 3 eq. per le restrizioni vincolari

Rigido libero : prendiamo come polo dei momenti: G

$$\begin{cases} \underline{R}^a = \underline{\dot{P}} = M \underline{a}_G \\ \underline{M}^a(G) = \frac{d}{dt} \underline{L}(G) \end{cases}$$

6 coordinate
libere

6 eq. di moto

Consideriamo il seguente caso :

1) $\underline{R}^a$ risultante delle forze attive
dipende solo dalla posizione e/o delle
velocità di G

2) $\underline{M}^a(G)$ dipende solo dagli angoli di
Euler e/o dalla velocità angolare

Potremmo pensare alle BCD come

$$\underline{R}^a = M \underline{a}_G$$

eq. di moto del centro
di massa a cui pensiamo
applicata la forza $\underline{R}^a$

$$\underline{M}^e(G) = \frac{d}{dt} \underline{L}(G)$$

equazione di precessione
azione al centro di
massa, pensato fisso,
sotto l'azione di $\underline{M}^e(G)$

Queste condizioni sono verificabili

1. Moto di un grave nel vuoto

$$\begin{cases} M \underline{g} = M \underline{a}_G \\ \frac{d}{dt} \underline{L}(G) = \underline{0} \end{cases}$$

momento
risultante del
peso rispetto a G
è nullo

→ moto di G = moto di un punto materiale

→ moto intorno a G = precessione per
inerzia

2. moto della Terra (sferico e omogeneo)
attorno al Sole

$$\begin{cases} M \underline{a}_G = -k \frac{M M_s}{\| \underline{x}_G - \underline{x}_s \|^2} \text{ vers } (\underline{x}_G - \underline{x}_s) \\ \frac{d}{dt} \underline{L}(G) = \underline{0} \end{cases}$$

precessione per
inerzia
attorno
a G

$$\tau \frac{d}{dt} \underline{L}(G) = \underline{M}^a(G) =$$

$$= \frac{3}{4} h (J_3 - J_1) \left(\frac{\omega_{\text{sole}}}{r_{\text{sole}}^2} + \frac{\omega_{\text{luna}}}{r_{\text{luna}}^2} \right) \sin \theta \underline{e}_T$$

↑
asse di
simmetria
della Terra

J_3, J_1 rispetto all'asse
di simmetria, e ad
un'asse per G ed esso ortogonale

Note casi generali. Non vero se la
risultante $\underline{R}$ dipende (oltre che dalla
posizione di G) anche dagli angoli di
Euler, ad esempio visto in un fluido

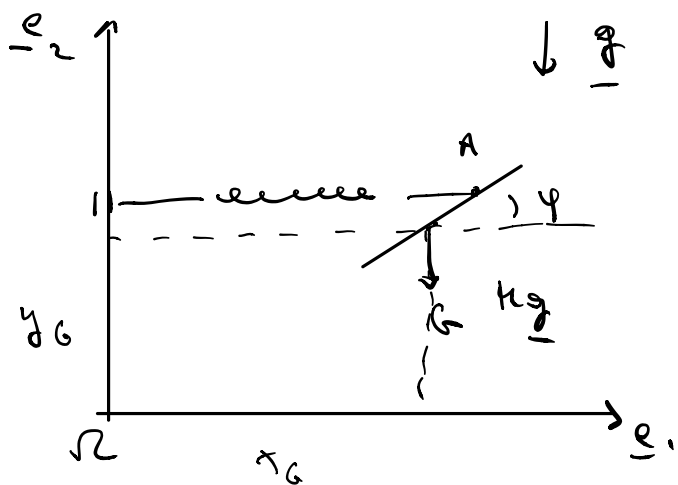
MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 21 APRILE 2020

— SECONDA PARTE

Esercizio

Asa omogenea, lunghezza l



su un piano verticale

Forza elastica in A

Forza peso

$$\overline{AG} = d$$

$\underline{\omega}$: ha direzione costante $\underline{e}_3$
3 coordinate libere

FCD

$$\begin{aligned} \bullet \quad M \underline{a}_G &= M (\ddot{x}_G \underline{e}_1 + \ddot{y}_G \underline{e}_2) = \\ &= -Mg \underline{e}_2 - c x_A \underline{e}_1 \\ &= -Mg \underline{e}_2 - c (\underline{x}_G + d \cos \varphi) \underline{e}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{dt} L(G) &= J_{3G} \ddot{\varphi} \underline{e}_3 = (\underline{x}_A - \underline{x}_G) \wedge (-c x_A \underline{e}_1) \\ &= (y_A \underline{e}_2 - y_G \underline{e}_2) \wedge (-c x_A \underline{e}_1) \\ &= -c x_A (y_G + d \sin \varphi - y_G) (\underline{e}_2 \wedge \underline{e}_1) \\ &= c x_A d \sin \varphi \underline{e}_3 \\ &= c d (\underline{x}_G + d \cos \varphi) \sin \varphi \underline{e}_3 \end{aligned}$$

Quindi mettendo tutto insieme

$$\begin{cases} M \ddot{x}_G = -c(x_G + d \cos \varphi) \\ M \ddot{y}_G = -Mg \\ I_{3,G} \ddot{\varphi} = c d (x_G + d \cos \varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

Vogliamo $d=0$, $A=G$

$$\begin{cases} M \ddot{x}_G = -c x_G \\ M \ddot{y}_G = -Mg \\ I_{3,G} \ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazioni poco} \\ \text{disaccoppiate} \end{array}$$

Equazioni di Eulero per i rigidi

Vogliamo chiarire la struttura dell'eq. dei momenti $\rightarrow$ scriviamo il momento angolare nella base principale di inerzia rispetto al polo dato

Se O è fisso (come nelle pendenze)
o coincide con G (come nel moto libero)

$$\underline{L}(O) = I_O(\underline{\omega})$$

$\underline{\omega}$ può avere
direzione
arbitraria

Chiamiamo $S(O: \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ la Terna
principale rispetto ad O , $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}$

$$I_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \rightarrow L(O) = I_O(\underline{\omega})$$

$$= \underline{J}_1 \omega_1 \underline{i} + \underline{J}_2 \omega_2 \underline{j} + \underline{J}_3 \omega_3 \underline{k}$$

Allora :

$$\frac{d}{dt} L(O) = I_O(\dot{\underline{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge I_O(\underline{\omega})$$

$$= (\underline{J}_1 \dot{\omega}_1 \underline{i} + \underline{J}_2 \dot{\omega}_2 \underline{j} + \underline{J}_3 \dot{\omega}_3 \underline{k}) +$$

$$+ (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) \wedge (\underline{J}_1 \omega_1 \underline{i} + \underline{J}_2 \omega_2 \underline{j} + \underline{J}_3 \omega_3 \underline{k})$$

$$= \underline{i} \left(J_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 J_3 - J_2 \omega_3 \omega_2 \right)$$

$$+ \underline{j} \left(J_2 \dot{\omega}_2 - J_3 \omega_1 \omega_3 + J_1 \omega_3 \omega_1 \right)$$

$$+ \underline{k} \left(J_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 J_2 - \omega_1 \omega_2 J_1 \right)$$

Adesso ricordiamo

$$\underline{M}^a(O) = \frac{d}{dt} L(O)$$

Equazioni di Eulero :

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = \underline{M}^e(0) \cdot \underline{i} \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = \underline{M}^e(0) \cdot \underline{j} \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = \underline{M}^e(0) \cdot \underline{k} \end{cases}$$

Scriviamo $\underline{\omega}$ nelle Terme solide in
funzione degli angoli di Eulero

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}$$

→ 3 equazioni differenziali del secondo
ordine negli angoli di Eulero (φ, θ, ψ)

Precessioni per inerzia

Supponiamo che :

$$\underline{M}(0) = \underline{0}$$

ad esempio grave
nel vuoto,
moto dello Teme

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

3 eq. differenziali del 1° ordine, non lineari, in $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 21 APRILE 2020

— TERZA PARTE

Previsioni per l'urto:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{di} \\ \text{Euler} \end{array}$$

Consideriamo alcuni casi particolari

1) $J_1 = J_2 = J_3 \Rightarrow$ l'ellissoide di

inertie relative ad O e una sfera

$\Rightarrow$ dalle eq. di Eulero

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$$

$\rightarrow \underline{\omega}(t)$ è costante e tutti i
moti possibili sono rotazioni uniformi

2) $J_1 = J_2 \neq J_3 \rightarrow$ struttura giroscopica
rispetto ad O

$$\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_{3,0} = \text{costante}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_1 = \left(\frac{J - J_3}{J} \omega_{3,0} \right) \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \left(\frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0} \right) \omega_1 \end{array} \right. \quad J = J_1 = J_2$$

Poniamo $\gamma = \frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0}$. Allora

• se $\gamma = 0 \Rightarrow \omega_1 = \text{cost.}, \omega_2 = \text{cost.}$

• se $\gamma \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = A \cos(|\gamma|t + \alpha) \\ \omega_2 = A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin(|\gamma|t + \alpha) \end{array} \right.$

A, α costanti arbitrarie

Segue da $\dot{\omega}_1 = -\gamma \dot{\omega}_2 = -\gamma^2 \omega_1$, moto armonico, $\omega_2 = -\frac{1}{\gamma} \dot{\omega}_1$

Notiamo: $\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = A^2 = \text{costante}$

Consideriamo un osservatore solidale S

$$\underline{\omega}(t) = \omega_{3,0} \underline{k} + \underbrace{\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j}}_{\underline{\omega}_e}$$

• $\omega_{3,0} \underline{k}$ vettore costante

• $\underline{\omega}_e = \omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j}$ velocità equatoriale

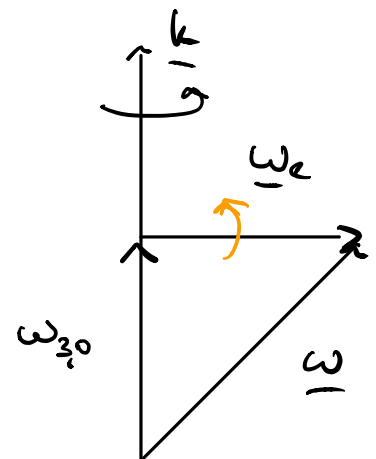
è un vettore di modulo costante

che ruota attorno all'asse giroscopico

$\underline{k}$, con velocità angolare costante

e pari a $|\gamma|$

$\Rightarrow$ in S , $\underline{\omega}$ ha modulo costante e direzione che ruota uniformemente intorno a $\underline{k}$



Invece per l'osservatore fisso Σ'

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \underline{L}(0) = \underline{0} \Rightarrow \underline{L}(0) \text{ è un vettore costante}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_0(\underline{\omega}) &= J \omega_1 \underline{i} + J \omega_2 \underline{j} + J_3 \omega_3 \underline{k} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad J_1 = J_2 = J \\ &= J (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) + (J_3 - J) \omega_3 \underline{k} \\ &= J \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_3 \underline{k} \end{aligned}$$

Allora

$$\underline{L}(0) = I_0(\underline{\omega}) = J \underline{\omega} + (J_3 - J) \omega_{3,0} \underline{k}$$

$$\text{da cui } \underline{\omega} = \underline{\frac{L(0)}{J}} + \underline{\frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0} \underline{k}}$$

3) $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ caso più generale

Esiste una descrizione qualitativa del moto, noto allo Poincaré

Ci limiteremo ad alcune proprietà

— se la velocità angolare iniziale $\underline{\omega}_0$ è diretta lungo un asse principale di inerzia $\Rightarrow$ il moto è una rotazione uniforme, cioè $\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}_0$

Prendiamo ad esempio $\underline{\omega}_0$ parallela ad $\underline{i}$

$$\omega_{0,1} \neq 0, \quad \omega_{0,2} = \omega_{0,3} = 0$$

Dalle eq. di Eulero

$$\omega_1(t) = \omega_{1,0} \quad \omega_2(t) = \omega_3(t) = 0$$

$$\underline{\omega}(t) = \omega_{0,1} \underline{i} \quad \text{è soluzione}$$

— il moto è una rotazione solo se la rotazione avviene attorno ad un asse principale di inerzia, ed è uniforme

Tuttavia, stiamo cercando soluzioni della forma

$$\Rightarrow \underline{\omega}(t) = \underline{\omega}(t) \underline{u} \quad \text{con} \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = 0 \quad |\underline{u}| = 1$$

le equazioni di Eulero possono venir scritte

come:

$$\underline{0} = I_0(\underline{\dot{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge I_0(\underline{\omega})$$

$$= \dot{\omega} I_0(\underline{u}) + \omega^2 \underline{u} \wedge I_0(\underline{u})$$

Moltiplichiamo per $\underline{u}$

$$\underline{0} = \dot{\omega} \underline{u} \cdot I_0(\underline{u}) + \omega^2 \underbrace{\underline{u} \cdot \underline{u} \wedge I_0(\underline{u})}_{\text{ortogonale a } \underline{u}}$$

$$= \dot{\omega} I_{\underline{u}, 0}$$

$$\rightarrow \underline{\dot{\omega}} = 0$$

Torniamo all'eq. di Eulero

$$\underline{0} = \dot{\omega} I_0(\underline{u}) + \omega^2 \underline{u} \wedge I_0(\underline{u})$$

$\rightarrow \underline{\dot{\omega}} = 0$

$$\Rightarrow \omega^2 \underline{u} \wedge I_0(\underline{u}) = \underline{0}$$

$$\text{Se } \omega \neq 0 \Rightarrow \underline{u} \wedge I_0(\underline{u}) = \underline{0}$$

è uguale a zero quando $\underline{u}$ e $I_0(\underline{u})$

sono paralleli. Quindi $\underline{u}$ è

$$\text{autovettore di } I_0 \quad \underline{I_0(\underline{u})} = \lambda \underline{u}$$

Concludiamo che $\underline{u}$ è Asse Principale
di Inertia

Quindi :

Proprietà in una precessione di inerzia
rispetto ad O , gli assi principali di
inerzia (rispetto ad O) sono le uniche
direzioni per cui il moto del rigido è
una rotazione (= assi di rotazione
primarie)