# CORPO RIGIDO

Due corpi:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^2$$

$$V = V(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$$

6 gradi di libertà $\leftrightarrow$ coord. lib. $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$

Nuove coord.

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \\ \bar{R} = \dfrac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

coord. del centro di massa (c.m.)

$$M \equiv m_1 + m_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{R} + \dfrac{m_2 \bar{r}}{M} \\ \bar{r}_2 = \bar{R} - \dfrac{m_1 \bar{r}}{M} \end{cases}$$

sostituiamo in $L$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left( \dot{\bar{R}}^2 + \cancel{\frac{2 m_2}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{\bar{R}}^2 - \cancel{\frac{2 m_1}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{\frac{\cancel{(m_1+m_2)} m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}} \dot{\bar{r}}^2$$

$$\frac{\cancel{(m_1+m_2)} m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} \equiv \mu \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$V = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = V(\bar{r})$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2}_{\text{particella libera con massa } M \text{ e posiz. c.m.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}_{\text{rappresenta di un corpo di massa } \mu \text{ soggetto a un potenziale } V}$$

Per un sist. a N corpi : Teorema di König

$$\bar r_i = \bar R + \bar r_i' \quad \Rightarrow \quad T = T' + \frac{1}{2} M \dot{\bar R}^2$$

en. cin. del c.m.

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{\bar r}_i'\|^2$$

$$\bar R = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \bar r_i}{M}$$

posizioni relative al c.m.

$$M = \sum_i m_i$$

Dim. $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \|\dot{\bar r}_i\|^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\|\dot{\bar R}\|^2 + \|\dot{\bar r}_i'\|^2 + 2\dot{\bar R}\cdot\dot{\bar r}_i'\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)\dot{\bar R}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar r}_i'^2 + \underbrace{\dot{\bar R}\cdot \underbrace{\sum_i m_i \dot{\bar r}_i'}}_{=0}$$

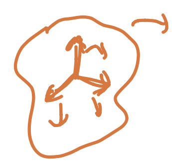
∝ velocità del c.m. nel sist. d'rif. del c.m.
$\Rightarrow = 0$

//

## Moto rigido di N pti materiali

$$\|\bar r_i - \bar r_j\| = \underset{\text{nel tempo}}{\text{cost.}} \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow$ distanze di tutti i pti da un pto scelto (solidale) è cost. in t.



**Prop.** Dato un moto rigido. Ad ogni istante $t$ $\exists!$ vettore $\bar\omega(t)$ t.c. $\forall \bar u$ vett. solidale si ha

$$\dot{\bar u} = \bar\omega \times \bar u$$

Dim. Prendiamo una terna o.n. $\{\bar e_i(t)\}_{i=1,2,3}$ solidale al corpo rigido.

Allora $\bar u(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \bar e_i(t) \Rightarrow \dot{\bar u}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \dot{\bar e}_i(t)$

→ basta dim. che $\exists \bar\omega$ t.c. $\dot{\bar e}_i = \bar\omega \times \bar e_i \quad i = 1, \dots, 3$,

ovvero trovare una soluz. all'eq. $\dot{\bar e}_i = \bar\omega \wedge \bar e_i$ con incognita $\bar\omega$

- moltiplichiamo a des. e sin. per $\bar e_i \times$

↓

$$\bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = \bar{e}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{e}_i) = \bar{\omega}(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i) - \bar{e}_i(\bar{\omega}\cdot\bar{e}_i) =$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \times \left(\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_j c_k \bar{e}_i\right) = \overset{\downarrow}{\phantom{x}}$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \sum_{mnp} \epsilon_{mnp} a_m \underbrace{(\bar{e}_i)_n}_{\delta_{in}} \bar{e}_p b_j c_k = \sum_{ijkmp} \epsilon_{ijk} \overbrace{\epsilon_{mip}}^{-\epsilon_{imp}} a_m b_j c_k \bar{e}_p =$$

$$= -\sum_{jkmp} (\delta_{jm}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{km}) a_m b_j c_k e_p = -\sum_{jk} a_j b_j c_k \bar{e}_k + \sum_{jk} a_k b_j c_k \bar{e}_j$$

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imp} = (\delta_{jm}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{km})$$

$$= -(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c} + (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}$$

$$\bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = \bar{\omega} - \omega_i \bar{e}_i$$

$$V = \sum_j v_j \bar{e}_j \qquad \bar{V}\cdot\bar{e}_i = \sum_j v_j \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i$$

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} (\bar{\omega} - \omega_i \bar{e}_i) = 3\bar{\omega} - \sum_i \omega_i \bar{e}_i = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} \times \bar{u} = \dot{\bar{u}}$$ (dim. per es.) //

MOMENTO ANGOLARE del corpo rigido (rispetto origine O di terna solidale)

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i \times \bar{v}_i$$

vett. solidal. — vel. $\bar{v}_i = \dot{\bar{r}}_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)$$ ← espressione LINEARE in $\bar{\omega}$

⇓

si può scrivere come un op. lineare che agisce sul vett. $\omega$

$$\equiv I\,\bar{\omega}$$

"Vel. ANGOLARE" ($\bar{\omega}$)

"OPERATORE d'INERZIA" ($I$)

ENERGIA CINETICA (Importante per scrivere la Lagrangiana del corpo rigido)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \bar{\omega}\cdot\left[\bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\, \bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i) = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\mathcal{I}\,\bar{\omega}$$

OP. D'INERZIA:

- Simmetrico : $\bar{u}'\cdot\mathcal{I}\bar{u} = \bar{u}\cdot\mathcal{I}\bar{u}'$
- Def. positivo : $\bar{u}\cdot\mathcal{I}\bar{u} > 0 \quad \forall \bar{u}\neq 0$, se il corpo è costituito da almeno 3 pti non allineati.
- $\mathcal{I}$ può essere rappresentato da una MATRICE, una volta scelta una base

$$\mathcal{I}\,\bar{e}_j = \sum_i \underbrace{(\bar{e}_i\cdot\mathcal{I}\bar{e}_j)}_{\mathcal{I}_{ij}}\ \bar{e}_i$$

MATRICE

$$\mathcal{I}\bar{u} = \sum_k u_k\,\mathcal{I}\bar{e}_k = \sum_{kj} u_k\,\mathcal{I}_{jk}\,\bar{e}_j = \sum_j \underbrace{\left(\sum_k \mathcal{I}_{jk}u_k\right)}_{\text{com. del vett. } \mathcal{I}\bar{u}}\bar{e}_j$$

$$\mathcal{I}_{11} = (\mathcal{I}\bar{e}_1)\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_1\cdot\sum_i m_i\, \bar{r}_i\times(\bar{e}_1\times\bar{r}_i) =$$

$$= \bar{e}_1\cdot\sum_i m_i\left[\bar{e}_1\,\bar{r}_i^2 - \bar{r}_i(\bar{r}_i\cdot\bar{e}_1)\right] =$$

$$= \sum_i m_i\left(\bar{r}_i^2 - (\bar{e}_1\cdot\bar{r}_i)^2\right) = \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2 - x_i^2)$$

$$= \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2) = \sum_i m_i\, d^2_{asse\,x} = I_x$$

momento d'inerzia risp asse x

$\mathcal{I}_{22} = I_y \qquad \mathcal{I}_{33} = I_z$

$$\mathcal{I}_{12} = \dots = \bar{e}_1 \cdot \sum_i m_i \left[ \cancel{\bar{e}_2 \, \bar{r}_i^2} - \bar{r}_i (\bar{r}_i \cdot \bar{e}_2) \right] = -\sum_i m_i x_i y_i$$

"prodotti d'inerzia"

$\mathcal{I}$ è SIMMETRICO $\Rightarrow$ DIAGONALIZZABILE, cioè si può scegliere una base (solidale) t.c. $\mathcal{I}_{ij}$ è diagonale

( ⇝ assi $\bar{e}_i$ vengono detti assi principali d'inerzia

⇝ $I_{ii}$ vengono detti momenti principali d'inerzia )

Se $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è una terna principale d'inerzia, cioè $\bar{e}_i$ sono autovetti di $\mathcal{I}$ con autovalori $I_i$ $(= \mathcal{I}_{ii})$, allora

$$\bar{M} = \mathcal{I}\bar{\omega} = \mathcal{I} \sum_{k=1}^{3} \omega_k \bar{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_k I_k \bar{e}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I}\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k^2$$

Teorema di Hygens-Steiner: dato asse $a_B$ passante per c.m. e un asse $a$ parallelo a $a_B$ e da esso distante $d$, allora

$$I_a = I_{a_B} + Md^2$$

Dim. prendiamo $a \parallel a_B \parallel$ asse $z$

$$I_{a_B} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2) \qquad I_a = \sum_i m_i \left( (x_i - d)^2 + y_i^2 \right)$$

$$= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i d^2 - 2d \underbrace{\sum_i m_i x_i}_{= 0}$$

//

Analogamente: $\mathcal{I}_O$ e $\mathcal{I}_B$ op. d'inerzia relativi a un polo generico $O$ e cm. $B$, allora

$$\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_O^B$$

dove $\mathcal{I}_O^B$ t.c. $\mathcal{I}_O^B \bar{u} = m\, \bar{r}_{OB} \times (\bar{u} \times \bar{r}_{OB}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$.

## Asse di rotazione fisso:

scegliamo $\bar{e}_3 \parallel$ asse fisso $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_3 = 0$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j = \frac{1}{2} \left( \bar{e}_1 \times \dot{\bar{e}}_1 + \bar{e}_2 \times \dot{\bar{e}}_2 \right)$$

La config. del corpo rigido è determinata dalla conoscenza dei vett. solidali $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ $\qquad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_1 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\, \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_2 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\, \bar{e}_1$$

La config. può cambiare nel tempo, e il moto è descritto dalla funzione $\theta(t)$ (1 grado di lib.)

$$\rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \bar{e}_1 \times \dot{\theta} \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \times (-\dot{\theta} \bar{e}_1) \right) = \frac{\dot{\theta}}{2} (\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \times \bar{e}_2)$$

$$\overset{!}{=} \dot{\theta}\, \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \dot{\theta}\, \bar{e}_3$$

velocità dell'angolo di rotazione — asse di rotazione

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \bar{e}_3 \cdot \mathcal{I} \bar{e}_3 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{33} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

mom. d'in. risp. asse di rotaz.

Rotaz. attorno a un ASSE passante per il c.m.

Si va a sist. di rif. del c.m.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + T'$$

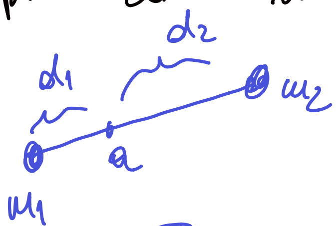
$T'$: in pto sist. di rif. l'asse di rotaz. è fisso ⇒ si applica quanto detto sopra.

3 + 1 gradi di libertà

Trottola non rientra nei casi precedenti

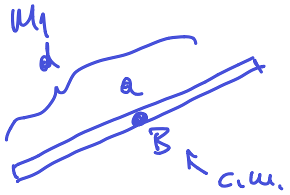
Esempi di momento d'inerzia.

1)




$$I_a = \sum_{i=1}^{2} m_i d_i^2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$

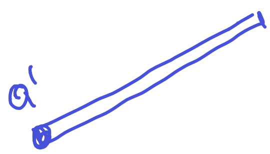
2)




asta omogenea di lungh. $d$ e dens. lin. $\rho$ $\rightarrow M = \rho \cdot d$

$$I_a = \int_{-d/2}^{d/2} s^2 \rho \, ds = \left. \frac{s^3}{3} \right|_{-d/2}^{d/2} \cdot \rho = 2\rho \frac{d^3}{24} = \frac{M d^2}{12}$$

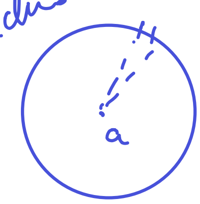
3)




$$I_{a'} = \int_0^d s^2 \rho \, ds = \frac{d^3}{3}\rho = \frac{M d^2}{3}$$

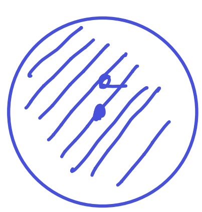
$$= I_a + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{M d^2}{12} + \frac{M d^2}{4} = \frac{M d^2}{3}$$

4) anello




$$I_a = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R \, d\theta = R^3 \rho \, 2\pi = R^2 (2\pi R \cdot \rho) = MR^2$$

5) disco



$\rho$ dens. sup.

$$I_a = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho \, r \, dr \, d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = (\pi R^2 \rho) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

# MOTO CENTRALE

Dati due corpi con potenziale $V = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$, allora

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}$$ $\rightsquigarrow$ problema disaccoppiato

Ci restringiamo al caso di potenziale centrale

$$V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|^2)$$

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r}^2)$$

$\uparrow$

è una Lagr. INVARIANTE per ROTAZIONI:

presa rotaz. $O$ (matrice ortogonale) $\qquad \varphi(\bar{r}) = O\bar{r}$

$$\|O \cdot \bar{r}\|^2 = \bar{r}^T O^T O \bar{r} = \bar{r}^T \bar{r} = \|\bar{r}\|^2$$

$$\|O \dot{\bar{r}}\|^2 \quad \dot{\bar{r}} \quad \dot{\bar{r}} \quad = \|\dot{\bar{r}}\|^2$$

$$\Rightarrow L(O\bar{r}, O\dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \|O\dot{\bar{r}}\|^2 - V(\|O\bar{r}\|^2) = L(\bar{r}, \dot{\bar{r}})$$

$\Longrightarrow$ teorema di Nöther

$\bar{M}$ (mom. ang.) è una cost. del moto

(cioè abbiamo 3 cost. del moto scalari)

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

Se $\bar{M}$ è cost. del moto, vuol dire che quando è valutata in $\bar{r}(t), \dot{\bar{r}}(t)$ che soddisfano le eq. di Lagr., è cost. nel t.

$$\bar{M} = \bar{r} \times m\dot{\bar{r}} \qquad (*)$$

Se $\overline{M} \neq 0$, (A) ci dice che $\overline{r}$ e $\dot{\overline{r}}$ sono $\perp \overline{M}$

Siccome $\overline{M}$ è fisso durante il moto, vuol dire che $\overline{r}(t)$ e $\dot{\overline{r}}(t)$ stanno sempre nel PIANO ORTOGONALE a $\overline{M}$ cioè il MOTO avviene su un PIANO.

(Se $\overline{M} = 0$, (A) $\Rightarrow$ $\overline{r} \parallel \dot{\overline{r}}$ cioè moto rettilineo)

$\rightsquigarrow$ possiamo assumere che il moto avvenga su un PIANO, e che quindi $\overline{r} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$ $\quad \dot{\overline{r}} = \dot{x}\overline{e_1} + \dot{y}\overline{e_2}$

$\Rightarrow$ problema è ridotto a 2 GRADI DI LIBERTA'

$$L(\overline{r}, \dot{\overline{r}}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2+y^2})$$

$\overline{M} \parallel$ asse z

- per scrivere L a 2 gradi di lib. abbiamo usato 2 delle 3 costanti del moto: abbiamo infatti usato solo la direzione di $\overline{M}$ (2 cost. del moto)

  Rimane il MODULO di $\overline{M}$ (ovvero la componente di M lungo asse z)

  $\downarrow$

  ci aspettiamo di ritrovare questa cost. del moto in L.

Domani lezione alle 11:15