# TEORIA EFFICACE $(d=1)$ (Approccio Wilsoniano)

Prendiamo due campi 1-dim. $x$ e $y$

$$x : M \to N$$
$$y : M \to N$$

e prendiamo $M = S^1$, consideriamo l'azione

$$S[x,y] = \int_{S^1} dt \left( \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + V(x,y) \right)$$

segnatura Euclidea

con $V(x,y) = \frac{1}{2}\left( m^2 x^2 + M^2 y^2 \right) + \frac{\lambda}{4} x^2 y^2$

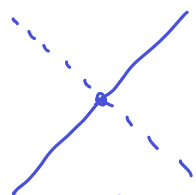
Nell'interpretazione di QM: due oscillatori armonici con diverse frequenze; accoppiamento

Nell'interpretazione di $d=1$ QFT: termini di massa; interazione

$\mathcal{L} \rightsquigarrow$ Regole di Feynman

$x$ 
$\frac{1}{k^2+m^2}$

$y$ 
$\frac{1}{k^2+M^2}$


$-\lambda$

segnatura Euclidea

Variabile della trasf. di Fourier di $x(t)$ (~Energia) $\longrightarrow$ siccome $t \in S^1$

$$K = \frac{2\pi}{T} n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

periodo di $S^1$

Se siamo interessati a correlatori che coinvolgono solo il campo $x$, possiamo "integrare via" il campo $y$.

$$\left[ \quad \langle x \cdots x \rangle = \int \mathcal{D}x\mathcal{D}y\, e^{-S}\, x\cdots x = \int \mathcal{D}x\; x\cdots x \underbrace{\int \mathcal{D}y\, e^{-S[x,y]}}_{e^{-S_{eff}[x]}} \right.$$

$$\left. \hookrightarrow \int \mathcal{D}x\, e^{-S_{eff}[x]}\, x\cdots x \quad \right]$$

$$S[x,y] = \int_{S^1} dt \left( \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\dot{y}^2 + V(x,y) \right) \text{ con } V(x,y) = \frac{1}{2}\left( \omega^2 x^2 + M^2 y^2 \right) + \frac{\lambda}{4} x^2 y^2$$

$$\underbrace{\int \mathcal{D}y\, e^{-S[x,y]}}_{e^{-S_{eff}[x]}} = e^{-\int_{S^1} dt \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} x^2 \right)} \underbrace{\int \mathcal{D}y\, e^{-\int_{S^1} dt \left( \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{M^2}{2} y^2 + \frac{\lambda}{4} x^2 y^2 \right)}}$$

$$= \int \mathcal{D}y\, e^{-\frac{1}{2}\int_{S^1} dt \left[ y \left( -\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{\lambda}{2} x^2 \right) y \right]}$$

$$= \left( \det\left[ -\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{\lambda}{2} x^2 \right] \right)^{-1/2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \log \det\left[ -\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{\lambda}{2} x^2 \right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \log \det\left[ \left( -\frac{d^2}{dt^2} + M^2 \right) \cdot \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{d^2}{dt^2} - M^2 \right)^{-1} x^2 \right) \right]}$$

$$\log \det A\cdot B = \log (\det A)\cdot(\det B) = \log(\det A) + \log(\det B)$$
$$= \operatorname{tr}\log A + \operatorname{tr}\log B$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left(-\frac{d^2}{dt^2}+M^2\right)}\; e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left(1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1}x^2\right)}$$

$$\int \mathcal{D}y\, e^{-S[x,y]} = e^{-\int_{S^1} dt\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}x^2\right)} \underbrace{\int \mathcal{D}y\, e^{-\int_{S^1} dt\left(\frac{\dot{y}^2}{2}+\frac{M^2}{2}y^2+\frac{\lambda}{4}x^2y^2\right)}}$$

$$= e^{-S_{eff}[x]}$$

$$e^{-S_{eff}[x]} = e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left(-\frac{d^2}{dt^2}+M^2\right)}\; e^{-\left[\int_{S^1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}x^2\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left(1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1}x^2\right)\right]}$$

$$S_{eff}[x] = \int_{S^1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}x^2\right)dt + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left[1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1}x^2\right] + \underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\log\left(-\frac{d^2}{dt^2}+M^2\right)}_{\text{cost. in } x}$$

[ Siamo interessati a

$$\langle x\cdots x\rangle = \frac{\int \mathcal{D}x\; x\cdots x\; e^{-S_{eff}[x]}\; \cancel{+\text{cost}}}{\int \mathcal{D}x\; e^{-S_{eff}[x]}\; \cancel{+\text{cost.}}}$$ ]

Consideriamo la funz. di Green dell'operatore $\frac{d^2}{dt^2}-M^2$, cioè

$$G(t,t') \quad \text{s.t.} \quad \left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)G(t,t') = \delta(t-t') \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1}f\right](t) = \int_{S^1} G(t,t')\,f(t')\,dt'$$

funz. di t

L'eq. $(*)$ ha come soluzione:

$$G(t,t') = \frac{1}{2M} \sum_{r\in\mathbb{Z}} e^{-M|t-t'+rT|}$$

$$\to \left[\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1} x^2\right](t) = \int_{S^1} G(t,t')\, x^2(t')\, dt'$$

Usiamo Serie di Taylor di $\log(1+\epsilon)$

Di partenza abbiamo $\lambda \ll 1$. Facciamo espansione attorno $\lambda\to 0$ del termine "complicato" in $S_{eff}$ (otteniamo una serie ASINTOTICA)

$$\mathrm{tr}\log\left(1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{d^2}{dt^2}-M^2\right)^{-1}x^2\right) \sim$$

$$\sim -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{2^n n}\int_{\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}} dt_1\cdots dt_n\, G(t_n,t_1)\,x^2(t_1)\,G(t_1,t_2)\,x^2(t_2)\cdots$$
$$\cdots G(t_{n-1},t_n)\,x^2(t_n)$$

traccia

$$= -\frac{\lambda}{2}\int_{S^1} dt\, G(t,t)\,x^2(t) - \frac{\lambda^2}{8}\int_{S^1\times S^1} dt_1\, dt_2\, G(t_2,t_1)\,x^2(t_1)\,G(t_1,t_2)\,x^2(t_2) + \ldots$$

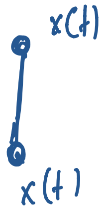
termine locale, quadratico in $x$

non-locale (integrale in $t_1$ e $t_2$)

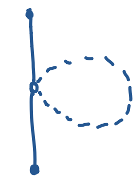
quartico in $x$

Feynman rules in questi nuovi termini

in teoria originale




$-\frac{\lambda}{2} G(t,t) \longleftrightarrow$

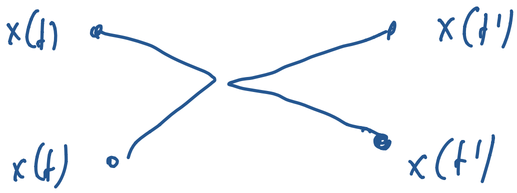


inverso del termine cinetico del campo y

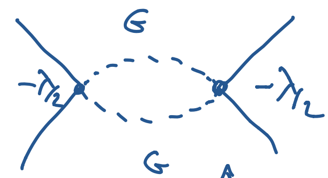
$\updownarrow$

propagatore di y

Termine quartico contribuisce alla funz. a 4 pti.




$\longleftrightarrow$




sym. fact. $1/2$

$$-\frac{\lambda^2}{8} G(t,t') G(t',t)$$

vertice che dipende da $\underbrace{\text{due}}_{t \text{ e } t'}$ pti nello $\underbrace{\text{"spazio-tempo"}}_{M}$

→ Nella teoria efficace troviamo NON-LOCALITA' già a tree-level (diagrammi "classici")

[ equazioni del moto sono integro-diff. ⇒

⇒ non si può risolvere l'eq. localmente cioè "pto per pto". ]

$G(t,t')$ decade ESPONENZIALMENTE

in $t' \neq t$ con scala dove è $\neq 0$

dettata $\sim 1/M$

$\Rightarrow$ effetti della NON-LOCALITÀ sono PICCOLI se

considero campi che variano

lentamente ($\sim M^{-1}$)

In particolare, se $M \to \infty$, $G$ è praticam. $= 0$

per ogni $t' \neq t$.

$\rightsquigarrow$ Espandiamo attorno a $t' = t$:

$$\int dt\, dt'\, G(t,t')^2 x^2(t)\, \underline{\underline{x^2(t')}} =$$

$$= \int dt\, \underbrace{dt'\, G(t,t')^2}_{\text{daranno dei numeri}}\, x^2(t) \Big[ x^2(t) + 2x(t)\dot{x}(t)(t'-t) + (\dot{x}^2(t) + x(t)\ddot{x}(t))(t'-t)^2 + \dots \Big]$$

$$= \int dt \Big[ \frac{\alpha}{M^3} x^4(t) + \frac{\beta}{M^5} \underbrace{\left( x^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^3\ddot{x} \right)}_{\text{"2 derivate"}} + \frac{\gamma}{M^7}(4 \text{ derivate}) + \underbrace{\dots}_{n>4 \text{ derivate}}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sono ADIMENSIONALI e risultano dagli integrali su $A'$. Il fattore $\frac{1}{M^k}$ è determinato da considerazioni dimensionali (tenuto conto che l'unica scala che appare in $G$ è $M$).

$\longrightarrow$ ogni nuova derivata di $x$ è SOPPRESSA da un'ulteriore potenza di $M$

| term. cost. | 2 deriv. | 4 deriv. | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{M^3}$ | $\frac{1}{M^5}$ | $\frac{1}{M^7}$ | $\dots$ |

Finché $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots$ sono piccole rispetto a $\frac{1}{M}$, l'espansione è sotto controllo

$\longrightarrow$ possiamo troncare l'espansione dell'azione non-locale a un numero finito di termini locali $\Rightarrow$ azione efficace locale

- Derivate piccole rispetto $M$ ?

$\updownarrow$

$K \ll M$

$\uparrow$ massa di $y$ (campo integrato via)

$\rightarrow$ usare l'azione eff. locale è giustificato

Se si studiano processi a energie inferiori alla scala $M$ (massa del campo da ottenere integrato)

ES. Modello Standard. $W_\mu^\pm$, $Z$, $A_\mu$

$\uparrow$ $M_W$ $\quad$ $\uparrow$ $M_Z$

Per processi che coinvolgono energie $\ll M_W, M_Z$ possiamo integrare via campi $W_\mu^\pm$, $Z$ e troncando l'et. eff. troveremmo l'azione della QED.

$\downarrow$

Quando approcciamo energie $\sim M$, vediamo dei problemi nella teoria eff. loc.; infatti dobbiamo reintrodurre i termini a derivate più alte o usare la teoria di partenza.

- Teoria di partenza è detta UV-theory
- Teoria efficace (troncata) è detta IR-theory