CORRELATORI

Un OPERATORE LOCALE è un op. che dipende dal campo valutato in un punto di M (d=1 M è detto "worldline")

Es. $f : N \to \mathbb{R}$ e def.

$$\mathcal{O}(t) = f(x(t))$$

Allora in Heisenb. pict. (in Eucl. signature)

$$\hat{\mathcal{O}}(t) = e^{\hat{H}t/\hbar}\, \hat{\mathcal{O}}(0)\, e^{-\hat{H}t/\hbar}$$

$$\hat{\mathcal{O}}(0) = f(\hat{x}(0)) = f(\hat{x})$$

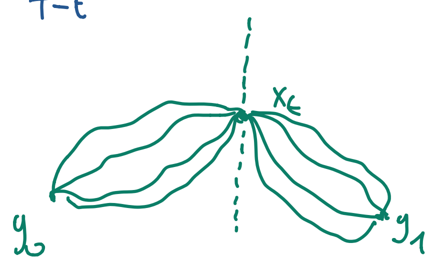
$$\langle y_1 | e^{-HT/\hbar}\, \hat{\mathcal{O}}(t) | y_0 \rangle = \langle y_1 | e^{-H(T-t)/\hbar}\, \hat{\mathcal{O}}(0)\, e^{-Ht/\hbar} | y_0 \rangle$$

$$= \int d^n x \, \langle y_1 | e^{-H(T-t)/\hbar} f(\hat{x}) | x \rangle \langle x | e^{-Ht/\hbar} | y_0 \rangle =$$

$$= \int d^n x \, f(x) \langle y_1 | e^{-H(T-t)/\hbar} | x \rangle \langle x | e^{-Ht/\hbar} | y_0 \rangle =$$

$$= \int d^n x \, f(x)\, K_{T-t}(x, y_1)\, K_t(y_0, x)$$

$$= \int d^n x_t \int_{\mathcal{C}_{T-t}[y_1, x_t]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar} f(x_t) \int_{\mathcal{C}_t[x_t, y_0]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar}$$



$$= \int_{\mathcal{C}_T[y_1,y_0]} \mathcal{D}x \; f(x(t))\, e^{-S[x]/\hbar}$$

Se $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ allora

$$\langle y_1, T | O_n(t_n) \cdots O_1(t_1) | y_0, 0 \rangle =$$

$$= \langle y_1 | e^{-H(T-t_n)/\hbar} f_n(\hat{x})\, e^{-H(t_n - t_{n-1})/\hbar} \cdots$$

$$\cdots f_2(\hat{x})\, e^{-H(t_2-t_1)/\hbar} f_1(\hat{x})\, e^{-Ht_1/\hbar} | y_0 \rangle =$$

$$= \dots =$$

$$= \int_{\mathcal{C}_T[y_1,y_0]} \mathcal{D}x \; e^{-S[x]/\hbar} \prod_{i=1}^{n} f_i(x(t_i))$$

$$\hat{O}_i(t_i) = f_i(\hat{x}(t_i))$$

$$\Rightarrow \langle y_1, T | \, T\{ O_n(t_n) \cdots O_1(t_1) \} | y_0, 0 \rangle$$

TIME ORDERED PRODUCT

$$= \int_{\mathcal{C}_T[y_1,y_0]} \mathcal{D}x \; e^{-S[x]/\hbar} \prod_{i=1}^{n} f_i(x(t_i))$$

- Se S non dipende dalle derivate di x, allora

$$\langle O_1 \cdots O_n \rangle = \langle O_1 \rangle \cdots \langle O_n \rangle \rightsquigarrow$$ correlatori sono banali.

È il termine derivativo che introduce $d(x_i, x_{i-1})$, che mischia quello che succede a pt diversi.

Il limite continuo

Osserviamo che in QM, gli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ non commutano.
D'altra parte, nel P.I. gli operatori diventano (dentro l'integrale) delle funzioni ordinarie che commutano.

Come facciamo in questo formalismo ad accorgerci che $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$?

Consideriamo il caso semplice $(N, G) = (\mathbb{R}, 1)$, e $V=0$.

$(m=1)$

Se $0 < t_- < t < t_+ < T$

$p = \dot{x}$

- $$\int_{\mathcal{C}_T[y_1, y_0]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar} \, x(t)\dot{x}(t_-) =$$
$$= \langle y_1 | e^{-H(T-t)/\hbar} \hat{x} \, e^{-H(t-t_-)/\hbar} \hat{p} \, e^{-\frac{Ht_-}{\hbar}} | y_0 \rangle$$

- $$\int_{\mathcal{C}_T[y_1, y_0]} \mathcal{D}x \, e^{-S[x]/\hbar} \, x(t)\dot{x}(t_+) =$$
$$= \langle y_1 | e^{-H(T-t_+)/\hbar} \hat{p} \, e^{-H(t_+-t)/\hbar} \hat{x} \, e^{-Ht/\hbar} | y_0 \rangle$$

Prendiamo RHS, facciamo lim. $t_- \to t$ da sotto $t_+ \to t$ da sopra e sottraiamo

$$= \langle y_1 | e^{-H(T-t)/\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] e^{-Ht/\hbar} | y_0 \rangle = \hbar \langle y_1 | e^{-HT/\hbar} | y_0 \rangle$$

Eucl. sign.

$\neq 0$, mentre se facciamo (ingenuamente) la stessa operazione ($-$, $\lim t_- \to t$ $t_+ \to t$) nelle espressioni con i P.I., otteniamo ZERO.

$\Big\downarrow$?

La versione discreta del P.I. (prima del lim $N \to \infty$) è sotto controllo, il problema ($\overset{\text{cioè}}{= 0}$) deve essere nel lim. $N \to \infty$ (per es. può non essere lecito scambiare i limiti $N \to \infty$ e $\begin{matrix} t_- \\ t_+ \end{matrix} \to t$)

Prendiamo la versione discreta dei due P.I.

Ora non possiamo mandare $t_\pm \to t$ in maniera continua, ma al meglio possiamo andarci vicino di Δt.

$$\Rightarrow \lim_{t_- \uparrow t} x(t)\,\dot{x}(t_-) - \lim_{t_+ \downarrow t} x(t)\,\dot{x}(t_+)$$

è sostituito da

$$x_t \, \frac{x_t - x_{t-\Delta t}}{\Delta t} - x_t \, \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t}$$

Nel P.I. discretizzato abbiamo $\int dx_t$; facendo la

$$\int dx_t \; K_{\Delta t}(x_{t+\Delta t}, x_t)\left(x_t \frac{x_t - x_{t+\Delta t}}{\Delta t} - x_t \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t}\right) K_{\Delta t}(x_t, x_{t-\Delta t})$$

ricordiamo che $K_t(x,y) = \frac{1}{(2\pi \hbar t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\hbar t}}$

$$-\hbar \int dx_t \; x_t \frac{\partial}{\partial x_t}\left[K_{\Delta t}(x_{t+\Delta t}, x_t) K_{\Delta t}(x_t, x_{t-\Delta t})\right]$$

integriamo per parti

$$= \hbar \int dx_t \; K_{\Delta t}(x_{t+\Delta t}, x_t) K_{\Delta t}(x_t, x_{t-\Delta t}) =$$

$$= \hbar \, K_{2\Delta t}(x_{t+\Delta t}, x_{t-\Delta t})$$

continuiamo con gli altri integrali e alla fine prendiamo il limite continuo. Alla fine otteniamo

$$\hbar \, K_T(y_0, y_1)$$

in accordo col risultato operatoriale

⇝ il lim $N \to \infty$ va sempre preso alla fine dei conti.

Nota:

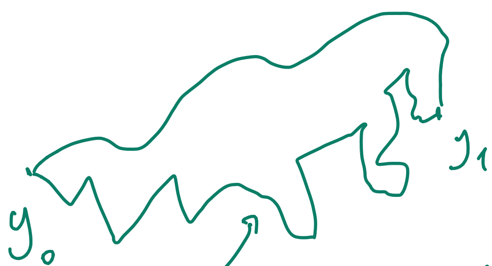
$$x_t \frac{x_t - x_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad - \quad x_t \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t}$$

nel lim continuo ($N \to \infty$, $\Delta t \to 0$) va a zero

se consideriamo in $\mathcal{C}_T[y_1, y_0]$ funz. $x(t)$

con DERIVATE CONTINUE.

Per ottenere col P.I. il risultato operatoriale, abbiamo bisogno di includere in $\mathcal{C}_T[y_1, y_0]$ anche le funz. con DERIVATE DISCONTINUE



solo questi contribuiscono a $\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle \neq 0$

e siccome " deve valere $\forall t$ in cui inseriamo il commutatore, abbiamo includere in $\mathcal{C}_T[y_1, y_0]$ anche cammini che siano non-diff. $\forall t$.

L'inclusione dei cammini non-differenziabili pone forti dubbi sul significato del lim.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{\Delta t},$$

quindi come possiamo dire che

$$\lim_{N\to\infty} e^{-\frac{\Delta t}{t_1}\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{x_{t_{i+1}}-x_{t_i}}{\Delta t}\right)^2} = e^{-\frac{1}{t_1}\int dt\,\frac{\dot{x}^2}{2}} \; ???$$

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \dots \overset{?}{=} \mathcal{D}x$$

Misura nel P.I.

Il limite sulla misura non esiste.

Ricordiamo:

dato uno sp. vett. V di DIMENSIONE FINITA D, una misura di Lebesgue $d\mu$ dev'essere t.c.

1) $\mathrm{vol}(U) \equiv \int_U d\mu > 0 \quad \forall\, U \subset V$ con $U \neq \emptyset$

2) $\mathrm{vol}(U') = \mathrm{vol}(U)$ se U' è ottenuto da U per traslazione

3) $\forall p \in U \quad \exists$ intorno U_p t.c. $\mathrm{vol}(U_p) < \infty$

Consideriamo la misura nel P.I. $(N = \mathbb{R}^n,\ G = \mathbb{1})$

- Lo spazio dei campi è INFINITO-DIM., $\mathcal{C}^0(M, \mathbb{R}^n)$
- Vogliamo che la misura sia positiva e invariante per traslazioni

Ma c'è teorema che dice che NON ESISTE UNA

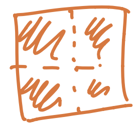
MISURA DI LEBESGUE NON-TRIVIALE SU UNO SPAZIO INFINITO-DIM.

Dim: Sia $C_x(L)$ un cubo di lato L e centrato in x.

In D-dim. contiene 2^D sotto-cubi

$C_{x_n}\left(\frac{L}{2}-\epsilon\right)$ disgiunti

D=2



$$vol\left(C_x(L)\right) \underset{\text{misura è positiva}}{\geq} \sum_{n=1}^{2^D} vol\left(C_{x_n}\left(\frac{L}{2}-\epsilon\right)\right) \underset{\text{inv. per trasl.}}{=} 2^D vol\left(C_x\left(\frac{L}{2}-\epsilon\right)\right)$$

$D\to\infty \Rightarrow vol\left(C_x(L)\right)\to\infty$ a meno che $C_{x_n}\left(\frac{L}{2}-\epsilon\right)\to 0$

$\Rightarrow \forall$ aperto U $vol(U)=0 \Rightarrow d\mu$ è triviale. //

$\Rightarrow$ Il limite $\mathcal{D}x = \lim_{N\to\infty}\prod_{i=1}^{N} \frac{d^n x_i}{(2\pi\hbar\Delta t)^{n/2}}$ NON ESISTE.

Tuttavia in $d=1$ il seguente lim esiste:

$$d\mu_W := \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{N} \frac{d^n x_i}{(2\pi\Delta t)^{n/2}}\, e^{-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)^2}\right)$$

$d\mu_W$ è una MISURA su $C^0(M, \mathbb{R}^n)$

nota come MISURA di Wiener

Questa è una MISURA GAUSSIANA

che non è inv. per traslaz. (evadiamo teorema)

Per particelle soggette a un potenziale V:

Kac ha mostrato che la misura di Wiener

può essere usata per rendere rigoroso il P.I. di Feynman

anche quando $V \neq 0$.

Se $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una somma di funzioni in $L^2(\mathbb{R}^n; d^n x)$

e una funz. limitata:

$$K_T(y_0, y_1) = \int_{\mathcal{C}_T[y_1, y_0]} d\mu_W \, e^{-\frac{1}{\hbar}\int_0^T V(x(s))\, ds}$$

$$\mathcal{C}_T[y_1, y_0] = \{\text{mappe continue}\}$$

Notiamo che quando usiamo l'espansione asintotica,

i P.I. coinvolti sono P.I. di teoria libera.