

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 22 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

Previsione di moto libero di un rigido

ECD $\rightarrow$ corpo rigido

Rigido vincolato in O

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M}^O = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) \\ \underline{R}^O + \underline{F}_O = \dot{\underline{P}} \end{array} \right.$$

$\uparrow$ incognite

Rigido libero

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{R}^O = \dot{\underline{P}} = M \underline{a}_O \\ \underline{M}^O(G) = \frac{d}{dt} \underline{L}(G) \end{array} \right.$$

O fisso

angolo libero : G

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(0) = \underline{M}^a(0)$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $G \qquad \qquad \qquad G$

→ Equazioni di Eulero

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = \underline{M}^a(0) \cdot \underline{i} \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = \underline{M}^a(0) \cdot \underline{j} \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = \underline{M}^a(0) \cdot \underline{k} \end{cases}$$

→ Tensor principale di inerzia $I_0 = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}$

$$\left[\frac{d}{dt} \underline{L}(0) = I_0(\underline{\dot{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge I_0(\underline{\omega}) \right]$$

Applicazione delle equazioni di Eulero

→ precessioni per inerzie : $\underline{M}^a(0) = \underline{0}$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} J_1 \dot{\omega}_1 \rightarrow \omega_2 \omega_3 \\ \uparrow \quad \uparrow \end{matrix}$$

1) $J_1 = J_2 = J_3 \rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$

$$2) \quad J_1 = J_2 = J \\ \neq J_3$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &< 0 \rightarrow \omega_3 = \omega_{3,0} \\ \rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \left(\frac{J - J_3}{J} \omega_{3,0} \right) \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \left(\frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0} \right) \omega_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1 = A \cos(|\gamma| t + \alpha) \\ \omega_2 = A \frac{|\gamma|}{t} \sin(|\gamma| t + \alpha) \end{cases}$$

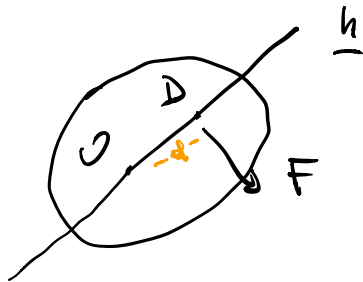
$$\underline{\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2}$$

$$\underline{\omega} = \omega_{0,3} \underline{k} + \underline{\omega}_e$$

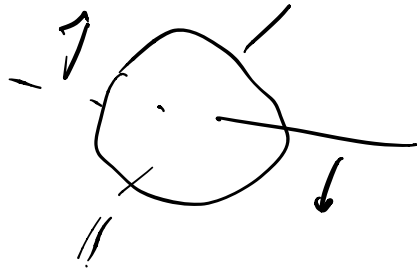
$$\Sigma \text{ bene} : \underline{\omega} = \frac{L(0)}{J} + \frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0} \underline{k}$$

$$3) \quad J_1 \neq J_2 \neq J_3$$

Fenomeni giroscopici elementari



precessione intorno ad
un punto O sull'asse
giroscopico
 $D \neq O$



$$\underline{F} = F \underline{i}$$

k ass. giroscopico

$$\begin{aligned} \underline{M}(0) &= (\underline{x}_0 - \underline{x}_0) \wedge F \underline{i} = d \underline{k} \wedge F \underline{i} \\ &= dF \underline{j} = \underline{M_0} \underline{j} \end{aligned}$$

Equazioni di Eulero $J_1 = J_2 = J \neq J_3$

$$\begin{cases} J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_2 \omega_3 & \underline{j} \\ J \dot{\omega}_2 = (J_3 - J) \omega_1 \omega_3 + M_0 & \underline{j} \\ J \dot{\omega}_3 = 0 & \underline{k} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \omega_3(t) = \omega_3(0) = \omega_{3,0}$$

Distinguiamo i seguenti casi:

- 1) $\omega_{2,0} = 0$ il rigido non è inizialmente in rotazione intorno a k
 $\omega_3 = 0$ nelle eq. di Eulero

$$\begin{cases} J \dot{\omega}_1 = 0 \\ J \dot{\omega}_2 = M_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1(t) = \omega_{1,0} \text{ costante} \\ \omega_2(t) = \omega_{2,0} + \underline{\underline{\frac{M_0}{J} t}}} \end{cases}$$

Se il corpo è inizialmente fermo
 $(\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = 0, \omega_{3,0} = 0)$

$$\frac{d}{dt} \underline{h} = \underline{\omega}(t) \wedge \underline{h} = \frac{M_0 t}{J} \underline{j} \wedge \underline{h} =$$

$$= \frac{M_0 t}{J} \underline{i}$$

$\Rightarrow$ $\underline{h}$ si muove nella direzione della
 forza $\underline{F} = F \underline{i}$ e la sua velocità
 cresce linearmente con il tempo

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 22 APRILE 2020

— SECONDA PARTE

$$\begin{cases} J \dot{\omega}_1 = (J - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J \dot{\omega}_2 = (J_3 - J) \omega_1 \omega_3 + M_0 \\ J \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

1) $\omega_{3,0} = 0, \omega_1(t) = 0, \omega_2(t) = \omega_{3,0} + \frac{M_0}{J} t$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{M_0}{J} \tau \hat{\mathbf{i}}$$

2) $\omega_{3,0} \neq 0$ ($\dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \omega_3 = \omega_{3,0}$)

Eq. di Eulero

$$\gamma = \frac{J_3 - J}{J} \omega_{3,0} \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\gamma \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \gamma \omega_1 + \frac{M_0}{J} \end{cases}$$

Sistema lineare con omogeneo

Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\gamma \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \gamma \omega_1 \end{cases} \rightarrow \text{precessioni per inerzia}$$

Quindi cerchiamo una soluzione particolare

ad es $\begin{cases} \omega_2 = 0 \\ \omega_1 = -\frac{M_0}{J\gamma} \end{cases}$

Allora:

sol
generale $\begin{cases} \omega_1(t) = A \cos(|\gamma|t + \alpha) - \frac{M_0}{J\gamma} \\ \omega_2(t) = A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin(|\gamma|t + \alpha) \end{cases}$

Soluzioni periodiche con periodo $\frac{2\pi}{|\dot{\gamma}|}$
e limitate nel Tempo

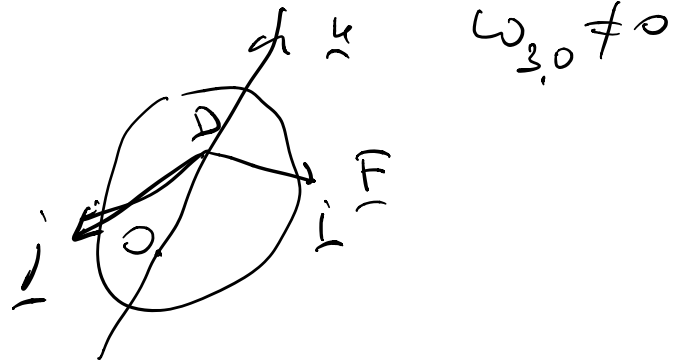
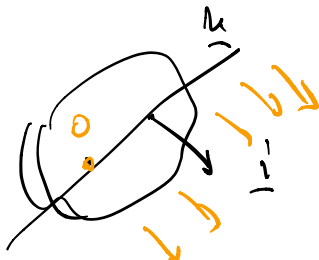
Il diverso da prima $\omega_2(t) = \omega_{20} + \frac{M}{J} t$

Facciamo la media su un periodo

$$\bar{\omega}_1 = -\frac{M_0}{J\gamma} \quad \bar{\omega}_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \underline{k} = \bar{\omega} \wedge \underline{k} = -\frac{M_0}{J\gamma} \underline{i} \wedge \underline{k} =$$

$$= \frac{M_0}{J\gamma} \underline{j}$$



quindi:

$$o) \quad \frac{d}{dt} \underline{k} = \frac{M}{J\gamma} \underline{j} \Rightarrow \left\| \frac{d\underline{k}}{dt} \right\| = \left| \frac{M_0}{J\gamma} \right|$$

→ spostamento dell'asse
giroscopico e l'angolo minore

$\gamma \sim \omega_{3,0}$

" Tenacia dell' elica giroscopica "

b) $\frac{d \underline{n}}{d \tau}$ e $\underline{j}$ parallel e $\underline{j}$

→ effetti giroscopici elevati

$$H^2 = (\underline{x}_A - \underline{x}_C) \wedge \underline{E}^2$$

$$\sim \underline{j}$$

$$\omega_{0,3} \neq 0, \quad \omega_{2,3} = 0$$
$$\omega_{1,0} = \omega_{2,0} = 0$$

Allow all'istante $t=0$

$$\begin{cases} 0 = A \cos \alpha - \frac{M_0}{J\gamma} \\ 0 = A \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ A = \frac{M_0}{J\gamma} \end{matrix}$$

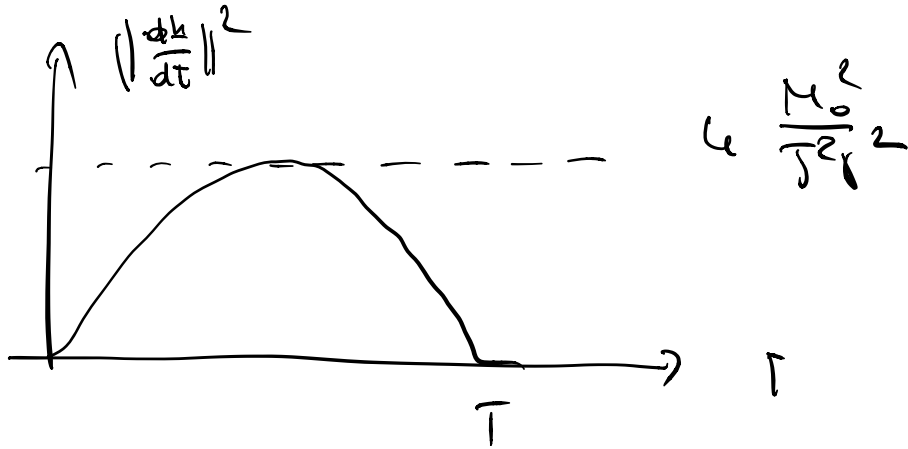
quindi:

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \frac{M_0}{J\gamma} (\cos |\gamma|t - 1) \\ \omega_2(t) = \frac{M_0}{J\gamma} \frac{|\gamma|}{\gamma} \sin |\gamma|t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{h}}{dt} &= \underline{\omega} \wedge \underline{h} = (\omega_1 \underline{i} + \omega_2 \underline{j} + \omega_3 \underline{k}) \wedge \underline{h} \\ &= -\omega_1 \underline{j} + \omega_2 \underline{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\underline{h}}{dt} \right\|^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{M_0^2}{J^2 \gamma^2} \left[\cos^2(|\gamma|t) + 1 \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos |\gamma|t + \sin^2(|\gamma|t) \right] \\ &= 2 \frac{M_0^2}{J^2 \gamma^2} \left[1 - \cos |\gamma|t \right] \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} \left\| \frac{d\underline{h}}{dt} \right\| = 2 \left| \frac{M_0}{J\gamma} \right|$$



ϵ^{-} inversamente
proporzionale a
 $\gamma \sim \omega_{3,0}$
ed ϵ^{-} limitato
nel Tempo

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 22 APRILE 2020

- TERZA PARTE

STRUTTURA DELLE EQUAZIONI

DI LAGRANGE

Sistema olonomico $\underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial k}{\partial q_i} = \boxed{Q_i} \quad i = 1, \dots, l$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$L = k - V$$

Struttura dell'energia cinetica $\rightarrow$ come
dipende da $q_i, \dot{q}_i, \tau$

Sia S un sistema olonómico a l gradi
di libertà $\underline{q} = (q_1, \dots, q_l)$

Consideriamo un punto $B \in S$

Durante il moto $\underline{x}_B(\tau) = \underline{x}_B(\underline{q}(\tau); \tau)$

Calcoliamo la velocità

$\uparrow$
ad esempio
se i vincoli
dipendono
dal tempo

$$\underline{v}_B = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_B(\tau) = \frac{d}{d\tau} \underline{x}_B(\underline{q}(\tau), \tau)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^l \frac{\partial}{\partial q_i} \underline{x}_B \dot{q}_i}_{\underline{v}_B^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \underline{x}_B}_{\underline{v}_B^T}$$

$\underline{v}_B^*$
velocità
virtuale

$\underline{v}_B^T$
velocità
di trascinamento

Notiamo: $\underline{v}_B$ dipende al più linearmente
dalle $\dot{q}$

$\Rightarrow$ l'energia cinetica per S è
sempre un polinomio di secondo grado
nelle variabili $\dot{q}$

Tutti:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B^* + \underline{v}_B^T\|^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B^*\|^2 \right)}_{K_2} + \underbrace{\left(\sum_{B \in S} m_B \underline{v}_B^* \cdot \underline{v}_B^T \right)}_{K_1}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B^T\|^2 \right)}_{K_0}$$

$$= K_2 + K_1 + K_0$$

Guardiamo questi termini separatamente

$$\cdot K_0 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \left\| \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \right\|^2 = K_0(\underline{q}; t)$$

indipendenti da $\dot{q}$

$$\cdot K_1 = \sum_{B \in S} m_B \left(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \cdot \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{B \in S} w_B \frac{\partial x_B}{\partial q_i} \frac{\partial x_B}{\partial \tau} \right) \dot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^l b_i(\underline{q}; t) \dot{q}_i = \underline{b} \cdot \dot{\underline{q}}$$

$$\dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$$

$$\underline{b} = (b_1, \dots, b_l)$$

↑
linéaire
relle $\dot{q}$

$$K_2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} w_B \left(\sum_{i=1}^l \frac{\partial x_B}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial x_B}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l \left(\sum_{B \in S} w_B \frac{\partial x_B}{\partial q_j} \frac{\partial x_B}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l A_{ij}(\underline{q}; t) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \underline{A} \cdot \underline{\dot{q}} \quad (\quad) (\quad)$$

→ forme quadratique in $\dot{q}_i$

Propriété : $\det A > 0$ (forme quadratique)
def. positive

Segue dalla definizione :

$$K_2 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \| \underline{v}_B^* \|^2 \quad (\text{sempre positivo})$$

ϵ nulla solo se $\underline{v}_B^* = \underline{0}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^l \frac{\partial \mathcal{L}_B}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots \\ \dots \dot{q}_l = 0$$

(coordinate libere sono linearmente indipendenti)

Note : se vincoli sono fissi, $\mathcal{L}_B$ non dipende esplicitamente dal tempo

$$\Rightarrow \underline{v}_B^* = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad K_0 = K_1 = 0$$

$$K = K_2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

Il tempo non compare esplicitamente

Esercizio

Sistema autonomo a due gradi di

libertà : q_1, q_2

1) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \exp(\dot{q}_1)$

2) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^3$

3) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2$

4) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 + q_2^3$

possiamo avere energia costante?

1) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + e^{\dot{q}}$ NO

è polinomio 2° grado

2) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \frac{q_1^3}{t}$ SI

3) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$

forma quadratica def. positiva

(è zero $\Leftrightarrow \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$)?

$\dot{q}_1 = -\dot{q}_2 \Rightarrow$ non è definita
positiva NO

4) $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 + q_2^3$

non è def. positiva. Def. pos. si
annulla solo quando $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$

Si può annullare per $\dot{q}_1 = 0$ e $\dot{q}_2$
qualsiasi NO

$$K = K_0(q; \tau) + \underbrace{b}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\dot{q}}_{-} + \frac{1}{2} \underbrace{\dot{q}}_{-} \cdot \underbrace{A}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\dot{q}}_{-}$$

form quadratic
def. positive