MOTO CENTRALE

Ci restringiamo al caso di potenziale centrale

$$V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|)$$

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

Lagr. INVARIANTE per ROTAZIONI

$\Longrightarrow$ teorema di Nöther: $\bar{M}$ (mom. ang.) è una COST. del MOTO

(cioè abbiamo 3 cost. del moto scalari)

$\rightsquigarrow$ possiamo assumere che il moto avvenga su un PIANO, e che quindi $\bar{r} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ $\quad \dot{\bar{r}} = \dot{x}\bar{e}_1 + \dot{y}\bar{e}_2$

$\Rightarrow$ problema è ridotto a 2 GRADI DI LIBERTA'

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2+y^2})$$

$\bar{M}$ // asse z

- Abbiamo usato come cost. del moto $M_x = 0$ $\quad M_y = 0$; M_z è ancora indeterminata.

Cambiamo coord:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2\dot{\theta}^2 - V(r)$$

$\hookrightarrow$ notiamo subito la presenza di una cost. del moto

$\rightsquigarrow$ θ è una coord ciclica

$$\Rightarrow \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta$$

$$M_z = m(x\dot y - y\dot x) = m(r^2\dot\theta\cos^2\theta + r^2\dot\theta\sin^2\theta) = p_\theta$$

invarianza $\theta \mapsto \theta+\alpha$ $\Leftarrow$ inv. per rotaz. lungo asse z

$$\to \quad \frac{d}{dt} p_\theta\big(r(t), \dot\theta(t)\big) = 0$$ quando $r(t)$ e $\theta(t)$ soddisfano eq. Lagr.

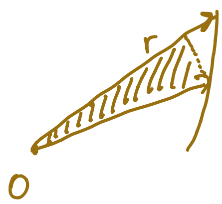
$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{1}{2} r^2 \dot\theta}_{\text{Velocità AREOLARE}}\Big) = 0$$

$\to$ velocità areolare è cost.

$\Updownarrow$

2ª legge di Keplero



$$dA = \frac{1}{2} r \, r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta \rightsquigarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta$$

$$\Big[\; A(t) = \int_A r' dr' d\theta' = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' \int_0^{r(\theta')} r' dr' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r(\theta')^2 d\theta'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta \;\Big]$$

$$m r^2 \dot\theta = \ell \quad \text{costante}$$

componente M_z; siccome scelto $\vec M$ parallelo nella direz. dell'asse z, M_z è positivo.

$$\Downarrow$$

$$\dot\theta = \frac{\ell}{m r^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) \text{ è una funzione monotona (crescente)}$$

$\Updownarrow$

è invertibile $\rightsquigarrow$ mi def. un buon cambiamento di coordinate

θ può essere usato come variabile in luogo del tempo t

$\downarrow$

possiamo esprimere la traiettoria con la funz.

$$r(\theta) \equiv r(t(\theta))$$

Coord. CICLICA $\Rightarrow$ possiamo ridurre il problema a 1 grado di libertà

$$\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$L_{eff} = L - \dot\theta p_\theta \Big|_{\dot\theta = \frac{\ell}{mr^2}} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 - V(r) - \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)\ell$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2}m\dot r^2 - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}m\dot r^2 - V_{eff}(r)$$

$\rightsquigarrow$ risolviamo: $r(t)$ $\downarrow$ $\dot\theta(t) = \frac{\ell}{mr(t)^2} \rightsquigarrow \theta(t)$

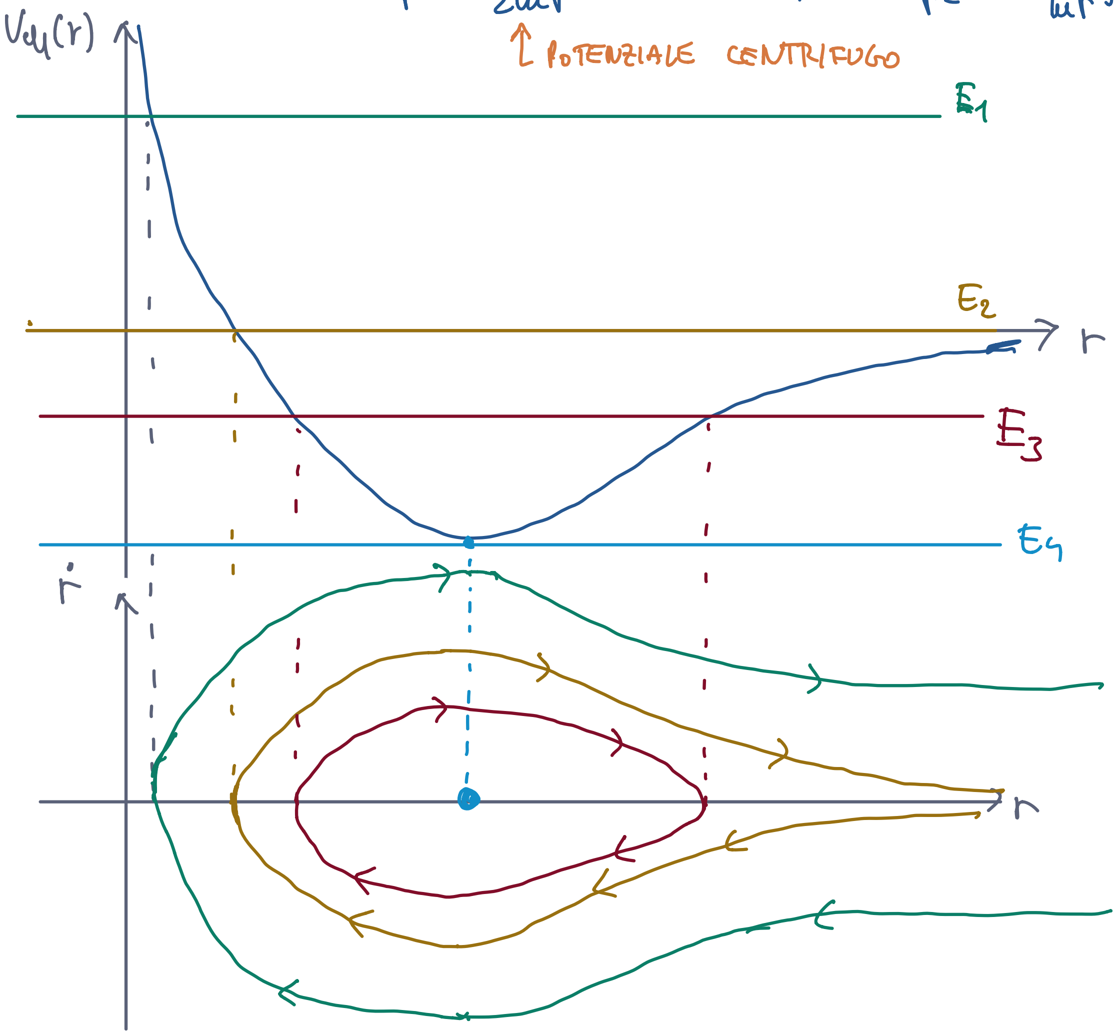
dove $V_{eff} = V(r) + \dfrac{\ell^2}{2mr^2}$

Se sono in grado di risolvere il sist. unidim. con Lagr. L_{eff}, poi sono in grado di trovare il moto di $\bar r(t)$ $(r(t), \theta(t))$

Diagramma di fase per $V(r) = -\frac{k}{r}$ (potenz. Kepleriano)

$\Rightarrow \quad V_{eff}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$ $\qquad V'_{eff} = +\frac{k}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = \frac{1}{r^3}(kr - \ell)$

↑ POTENZIALE CENTRIFUGO



$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$

E_1) - pto materiale non arriva mai all'origine $(r \geq r_0)$
- non esiste un limite superiore per r : $r(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \infty$
- pto arriva dall'infinito, interagisce con la "barriera centrifuga" e viene respinto verso l'infinito (tipico PROCESSO D'URTO)

E_2) simile a caso (E_1), solo che ora $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$.

E_3) - moto è confinato tra r_{min} e r_{max} ⇝ "distanze apsidali"
↳ pericentro ↳ apocentro
↳ nel piano (x,y) : orbite LIMITATE (non necessariam. chiuse)

E_4) - min del pot. $\dot{r}(t) = 0 \Rightarrow r(t) = r_4$ cost. $\Rightarrow$ ORBITA CIRCOLARE $(\dot{\theta} \neq 0)$

Caso Kepleriano $\quad V(r) = -\frac{K}{r}$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Eq. Lagr.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r} \\ \frac{\partial L_{eff}}{\partial r} &= -\frac{K}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \end{aligned}\right\} \qquad \ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^3} \qquad (*)$$

Invece di trovare funzione $r(t)$ che risolve $(*)$, possiamo cambiare variabile $t \mapsto \theta$ e cercare soluz. $r(\theta)$.

$$r(t) = r(\theta(t)) \qquad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr(\theta(t))}{d\theta} = -\frac{\ell}{m} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\dot{r}(\theta) \cdot \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}\left(-\frac{\ell}{m}\right)\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{\ell^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ in } (*)$$

$$-\frac{\ell^2}{m^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad \cdot \frac{m^2 r^2}{\ell^2}$$

$$-\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r(\theta)}\right) = -\frac{km}{\ell^2} + \frac{1}{r(\theta)}$$

Definiamo $\quad u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$

$$u'' + u = \frac{km}{\ell^2} \qquad \qquad \frac{1}{\eta} \equiv \frac{km}{\ell^2}$$

$$u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Risolviamo $u'' + u = 1/\eta$

Eq. lin. del 2° ord. non-omogenea la cui omog. associata è eq. dell'oscillatore armonico con $\omega^2 = 1$

Soluz. particolare : $u(\theta) = 1/\eta$

cost. arbitraria

$C \equiv \frac{e}{\eta}$

Soluz. generale : $u(\theta) = \frac{1}{\eta} + \underline{\underline{C}} \cos(\theta - \underline{\underline{\theta_0}})$

$$u(\theta) = \frac{1}{\eta}\left(1 + e \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}} \quad (*)$$

equazione di una CONICA nel piano (in coord. polari)

Problema unidim. $L_{eff} = T_{eff} - V_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \left(-\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)$

$\leadsto$ $E = T_{eff} + V_{eff}$ cost. del moto ($E = T + V$ originari)

Dato E (r_{min} è pto di inversione $\leftrightarrow$ $V_{eff}(r_{min}) = E$)

siamo in grado di calcolare r_{min} :

$$-\frac{K}{r_{min}} + \frac{\ell^2}{2mr_{min}^2} = E \quad \to \text{eq. di } 2^\circ \text{ grado in } \frac{1}{r_{min}}$$

$$\frac{\ell^2}{2m}\left(\frac{1}{r_{min}}\right)^2 - K\left(\frac{1}{r_{min}}\right) - E = 0$$

$$\left(\frac{1}{r_{min}}\right)_{1,2} = \frac{Km}{\ell^2} \pm \frac{m}{\ell^2}\sqrt{K^2 + \frac{2E\ell^2}{m}}$$

$$= \frac{Km}{\ell^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad r_{min} = \frac{\ell^2/mk}{1 \pm \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}}$$

$-$: r_{max} che esiste solo per $E<0$.

Da $(*)$ $\Rightarrow$ $r_{min} = \dfrac{\eta}{1+e}$ con incognita e

(ci ricordiamo che $\frac{1}{\eta} = \frac{mk}{\ell^2}$)

$$e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk}}$$

e è l'eccentricità della CONICA

$0 \leq e < 1 \rightarrow$ ELLISSE

$e = 1 \rightarrow$ PARABOLA

$e > 1 \rightarrow$ IPERBOLE

<u>Prop.</u> Per un moto centrale con $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k>0$, le orbite sono CONICHE con un fuoco nell'origine (centro delle forze) di equazione

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

con parametro η ed eccentricità e dati da

$$\eta = \frac{\ell^2}{mk} \qquad e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk}}$$

Esse sono ellissi, parabole o iperboli per
$E<0$ $\quad$ $E=0$ $\quad$ $E>0$

$E<0$, $e<1$: $-1 \leq \cos(\theta-\theta_0) \leq 1 \Rightarrow$ denominatore $\in [1-e, 1+e]$

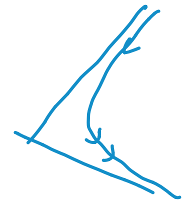
$$\Rightarrow \frac{\eta}{1+e} \leq r(\theta) \leq \frac{\eta}{1-e} \quad \rightarrow \text{orbita limitata}$$

$E>0,\ e>1$: $\exists\ \theta^*$ t.c. $\cos(\theta^*-\theta_0) = -\frac{1}{e}$ $\rightsquigarrow$ 2 soluz. $\theta^*_{1/2}$

$$\lim_{\theta\to\theta^*} r(\theta) \to \infty \longrightarrow \text{orbita illimitata}$$

$$\theta(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \theta^*_1$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} \theta^*_2$$

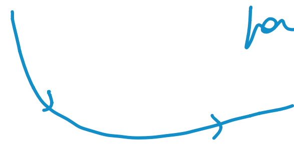


iperbole

$E=0,\ e=1$ eq. sopra diventa $\cos(\theta^*-\theta_0) = -1$

$$\Rightarrow \theta^* = \pi + \theta_0$$

$$\lim_{\theta\to\pi} r(\theta) \to \infty$$



parabola