

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 24 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

Sistema olonómico e l gradi di libertà

$$q = (q_1, \dots, q_l)$$

→ equazioni di Lagrange descrivono la dinamica.

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{caso conservativo} \\ k = 1, \dots, l$$

$$L = K - V \quad \text{funzione Lagrangiana}$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, \dots, l$$

↑ forze generalizzate

caso non conservativo

Struttura dell'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \|\underline{v}_B\|^2$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_B &= \frac{d}{dt} \underline{x}_B(\underline{q}(t), t) \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \\ &= \underline{v}_B^x + \underline{v}_B^T \end{aligned}$$

$$K = K_2 + K_1 + K_0$$

$$= K_0(\underline{q}; \underline{t})$$

indipendente da $\dot{q}$

$$+ \underline{b}(\underline{q}; \underline{t}) \cdot \underline{\dot{q}}$$

dipende linearmente da $\dot{q}$

$$+ \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \underline{A}(\underline{q}; \underline{t}) \cdot \underline{\dot{q}}$$

forma quadratica in $\dot{q}$

Dipendenza da $\underline{q}$ è arbitraria

$\rightarrow A$ è definita positiva
det $A > 0$

Sintesi delle equazioni di Lagrange

Caso generale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = \underline{Q_i} \quad i = 1, \dots, l$$

• Q_i = forze generalizzate in esame

$$= \sum_{B \in S} \underline{F_B} \cdot \frac{\partial \underline{x_B}}{\partial q_i} \quad \underline{x_B} = \underline{x_B}(q(t), t)$$

→ dipendono da q , $\dot{q}$, t

ma non dipendono da $\ddot{q}$

(le forze non dipendono da $\ddot{q}$)

• $\frac{\partial K}{\partial q_i}$ K funzione di q , $\dot{q}$, t

• $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$ K funzione di q , $\dot{q}$, t
↑ quadratica

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[K_0 + \underline{b_i} \cdot \underline{\dot{q}} + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot \underline{A} \underline{\dot{q}} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^l A_{ij}(\underline{q}, t) \underline{\dot{q}_j} + b_i(\underline{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^l A_{ij}(\underline{q}, t) \underline{\ddot{q}_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^L \left(\frac{d}{d\tau} A_{ij}(\underline{q}, \tau) \right) \dot{q}_j$$

$$+ \left(\frac{d}{d\tau} b_i(\underline{q}(\tau), \tau) \right)$$

Le equazioni di Lagrange, per ogni sistema olonomo, hanno la forma

$$\sum_{j=1}^L A_{ij}(\underline{q}, \tau) \ddot{q}_j = \underbrace{F_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \tau)}_{i=1, \dots, L}$$

Definiamo $\underline{F} = (F_1, \dots, F_L)$

In notazione matriciale:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial k}{\partial q_i} = Q_i \Rightarrow \underline{A} \underline{\ddot{q}} = \underline{F}$$

La matrice A è definita positiva;

in particolare $\det A > 0 \Rightarrow A$ è

invertibile. Quindi

$$\underline{A} \underline{\ddot{q}} = \underline{F} \Rightarrow \underline{\ddot{q}} = \underline{A^{-1} F}$$

$$A = A(\underline{q}, \tau)$$

dipende
 $\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \tau$

Eq. di Lagrange $\Rightarrow$ sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale $\left[\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m} \right]$

$\rightarrow$ problema ben posto

Conoscendo dati iniziali $q_i(t=0), \dot{q}_i(t=0)$

$\rightarrow$ possiamo risolvere per $\underline{q} = \underline{q}(t)$

$\rightarrow$ problema della dinamica e "risolto"

Le equazioni di Lagrange hanno la struttura di un sistema dinamico

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 24 APRILE 2020

- SECONDA PARTE

Le eq. di Lagrange hanno la struttura di un sistema dinamico.

Definiamo

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$$

$$i = 1, \dots, n$$

p_i : i-esimo momento coniugato

Abbiamo visto $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^l A_{ij} \dot{q}_j + b_i$

$\Rightarrow p_i = \sum_{j=1}^l A_{ij} \dot{q}_j + b_i$, o in

notazione vettoriale $\underline{p} = A \underline{\dot{q}} + \underline{b}$

$\underline{p} = (p_1, \dots, p_l)$

Allora $\underline{\dot{q}} = A^{-1} (\underline{p} - \underline{b})$: vuol

dire che abbiamo espresso $\underline{\dot{q}}$ come

funzione di $\underline{q}$, $\underline{p}$, t

$\underline{\dot{q}} = A^{-1} (\underline{p} - \underline{b}) \Rightarrow \boxed{\dot{q}_i = \gamma_i(\underline{q}, \underline{p}, t)}$
 $i = 1, \dots, l$

Abbiamo anche

$\boxed{\frac{d}{dt} p_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \right) \Big|_{\dot{q}_i = \gamma_i}$
eq. lagrange

$= \boxed{f_i(\underline{q}, \underline{p}, t)}$

Quindi (dalle condizioni A invertibile)
 segue che possiamo scrivere le eq. di
 Lagrange come un sistema normale di
 $2l$ eq. differenziali del primo ordine
 nelle incognite $(q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l)$

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \gamma_i(\underline{q}, \underline{p}, t) \\ \frac{dp_i}{dt} = f_i(\underline{q}, \underline{p}, t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, l$$

Introduciamo

$$\underline{y} = (q_1, \dots, q_l, p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^{2l}$$

$$\underline{G} = (\gamma_1, \dots, \gamma_l, f_1, \dots, f_l) \in \mathbb{R}^{2l}$$

Sistema
 dinamico : $\frac{d}{dt} \underline{y} = \underline{G}(\underline{y}, t)$

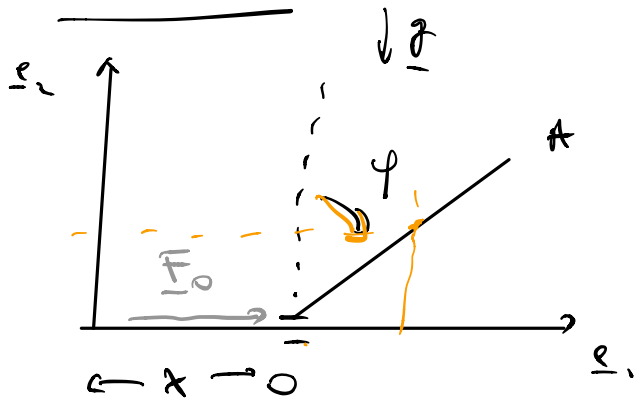
Lo spazio delle $\underline{y}$ si dice "spazio
 delle fasi"

Comma 60 : il caso più semplice

$$\underline{F} = m \underline{a} \iff \begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{p} = \underline{F} \\ \frac{d}{dt} \underline{x} = \frac{1}{m} \underline{p} \end{cases} \quad (\underline{x}, \underline{p})$$

$x, \ddot{x} = a$

Esercizio



$\overline{OA} = l$, primo vertice
massa m

$$\underline{F}_0 = (P\varphi + D\dot{\varphi}) \underline{e}_1$$

- 1) eq. di Lagrange
- 2) reazione a O

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,0} \dot{\varphi}^2$$

$$\underline{x}_G = \left(x + \frac{l}{2} \sin \varphi \right) \underline{e}_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_G = \left(\dot{x} + \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \underline{e}_1 - \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \underline{e}_2$$

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{x} l \cos \varphi \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi$$

Atto : $I_{G,0} = m \frac{l^2}{3}$, $I_{G,0} = m \frac{l^2}{12}$

$$K = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi \right) + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{12} \dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi \right)$$

$$V = - m g \cdot \underline{x}_G = m g \frac{l}{2} \cos \varphi$$

Lavoro virtuale dello sforzo a 0 è

$$\underline{F}_0 \cdot \delta \underline{x}_0 = F_0 \delta x$$

Quindi :

$$Q_x = F_0 - \frac{\partial V}{\partial x} = F_0$$

$$Q_\varphi = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = m g \frac{l}{2} \sin \varphi$$

Notiamo che l'energia cinetica ha
solo $K_2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \underline{A} \cdot \dot{\underline{q}}$

$$A = m \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{2} \cos \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi & \frac{l^2}{3} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \underline{A} \cdot \dot{\underline{q}}$$

$$\dot{\underline{q}} = (\dot{x}, \dot{\varphi})$$

$$\det A = m^2 \left(\frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4} \cos^2 \varphi \right) \geq \frac{m^2 l^2}{12} > 0$$

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \right. \right.$$

$$+ \underset{\uparrow}{l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi} \Big]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[m \dot{x} + \frac{1}{2} m l \dot{\varphi} \cos \varphi \right]$$

$$= m \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2} m l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$\bullet \quad \frac{\partial K}{\partial x} = 0, \quad Q_x = F_0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial K}{\partial x} = Q_x \quad \text{1° eq. di Lagrange}$$

$$\Rightarrow \quad m \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2} m l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F_0$$

Andiamo a vedere la 2° eq.

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \underset{\uparrow}{\frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2} + \underset{\uparrow}{l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi} \right) \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{2}{3} l^2 \dot{\varphi} + l \dot{x} \cos \varphi \right) \right]$$

$$= \frac{m}{3} l^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} \cos \varphi - \frac{1}{2} m l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\bullet \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \underset{\uparrow}{l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} m l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

Ricordiamo $Q_{\varphi} = m g \frac{l}{2} \sin \varphi$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}$$

$$\frac{m}{3} l^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} \cos \varphi - \frac{1}{2} m l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} m l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi = m g \frac{l}{2} \sin \varphi$$

In forma matriciale

$$m \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{2} \cos \varphi \\ \frac{l}{2} \cos \varphi & \frac{l^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + F_0 \\ m g \frac{l}{2} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ q: \varphi}}{A} \underset{\substack{\uparrow \\ q: \varphi}}{\ddot{q}} = \underset{\substack{\uparrow \\ q: \varphi}}{F}$$