Esercizi sui limiti di funzioni di 2 variabili

Esercizio 1. Calcolare (se esiste) il limite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$$

Svolgimento. Passo 1: mi faccio un'idea del possibile risultato. Per esempio, consideriamo le restrizioni di $f(x,y) = \frac{xy^2}{4x^2+y^4}$ a

- asse x ($y=0$). Si ha
$$f(x,0) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$
- asse y ($x=0$). Si ha
$$f(0,y) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$
- bisettrice $y = x$. Si ha
$$f(x,x) = \frac{x^3}{4x^2+x^4} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$$

Congetturo che $L = 0$.
Passo 2: provo a dimostrare che $L = 0$ passando alle coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)}{\rho^2(4\cos^2(\vartheta)+\rho^2\sin^4(\vartheta))} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta)}{4\cos^2(\vartheta)+\rho^2\sin^4(\vartheta)} \ldots ???$$

NON CONCLUDO NULLA.
Sospetto che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4} \neq 0...$$

cerco una restrizione di f lungo la quale il limite non sia 0.
Idea: far "pesare" x e y **al denominatore allo stesso modo**, cioè considero la restrizione di f alla curva

$$y = x^{1/2}$$

Allora, al denominatore ho il contributo x^2, e il contributo $(x^{1/2})^4 = x^2$. Allora

$$f(x, x^{1/2}) = \frac{x(x^{1/2})^2}{4x^2+(x^{1/2})^4} = \frac{x^2}{5x^2} = \frac{1}{5} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x,x^{1/2}) = \frac{1}{5}.$$

Conclusione:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{4x^2+y^4} \text{ !!!!!!!!!!!!!}$$

Esercizio assegnato. Calcolare (se esiste) il limite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^9}$$

Esercizio 2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_2^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + 4xy^2 & \text{se } x > 2, \\ 8y^2 & \text{se } x \le 2, \end{cases} \tag{1}$$

e indicare in quali regioni di $\mathrm{dom}(f)$ la funzione è continua.

Svolgimento. Chiaramente

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^2,$$

in quanto la formula (1) definisce f per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ora, si vede subito che

$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}\sqrt{8} + 4xy^2 \quad \forall\,(x,y) \in (2,+\infty)\times\mathbb{R},$$

quindi f è continua sul semipiano $(2,+\infty)\times\mathbb{R}$, in quanto è data dalla somma di funzioni continue. Analogamente, f è continua su $(-\infty,2)\times\mathbb{R}$. Resta da controllare la continuità della restrizione di f alla retta $x = 2$, lungo la quale f cambia definizione. Bisogna quindi controllare se per ogni punto $P_o = (2, y_o)$ appartenente alla retta $x = 2$, f è continua in P_o, cioè

$$\lim_{(x,y)\to(2,y_o)} f(x,y) = f(2,y_o) = 8y_o^2. \tag{2}$$

In vista della definizione (1) di f, distinguiamo il caso $(x,y_o) \to (2,y_o)$, con $x \to 2^+$, dal caso $(x,y_o) \to (2,y_o)$, con $x \to 2^-$. Chiaramente,

$$\lim_{(x,y)\to(2,y_o),\,x\to 2^-} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,y_o),\,x\to 2^-} 8y^2 = 8y_o^2.$$

D'altra parte, si ha anche che

$$\lim_{(x,y)\to(2,y_o),\,x\to 2^+} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,y_o),\,x\to 2^+} \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}\sqrt{8} + 4xy^2\right) = \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\sqrt{8} + 8y_o^2 = 8y_o^2.$$

Concludiamo che la (2) vale. Quindi f è continua anche sulla retta $x = 2$.
Allora

$$f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}^2).$$

Esercizio assegnato. Studiare la continuità in $(0,0)$ delle funzioni

$$1).\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$2).\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$3).\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$