# SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 18 MARZO 2020
- PRIMA PARTE

---

## SISTEMI DINAMICI 1-DIM CONTINUI

$$\dot{x} = f(x)$$

$x = x(t)$ funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ( $I$ può coincidere con $\mathbb{R}$ )

$f$ sarà in generale liscia

Esempio $\dot{x} = \sin x$

Separazione delle variabili

$$\frac{dx}{dt} = \sin x \longrightarrow dt = \frac{dx}{\sin x}$$

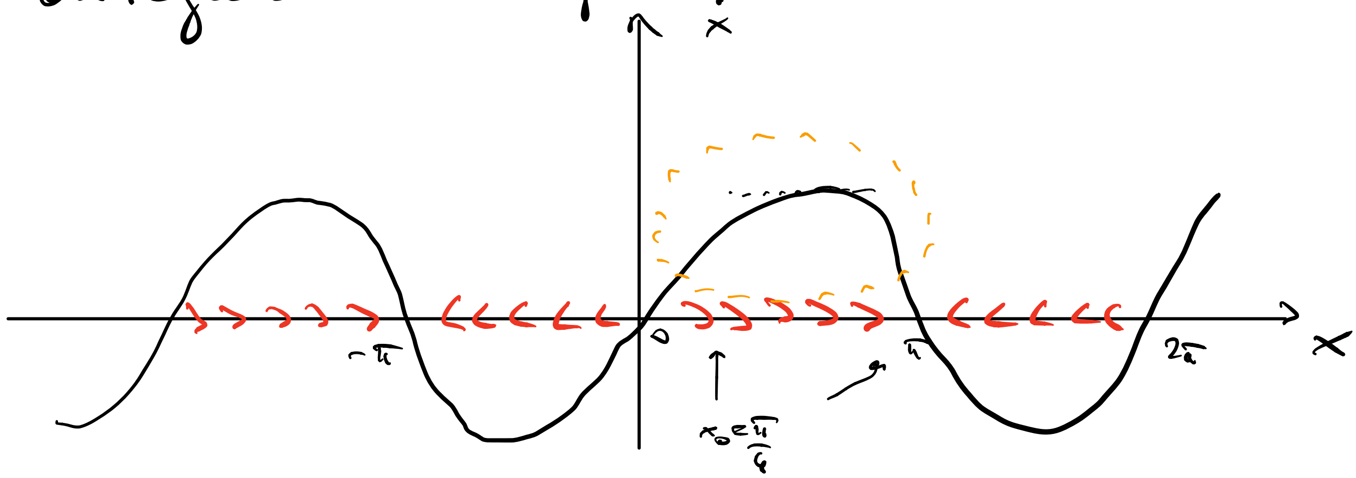
$$\rightarrow t = \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln\left|\frac{1}{\sin x} + \cos x\right| + C$$

la costante $C$ si fissa ponendo $x = x_0$ a $t = 0$

$\rightarrow \quad x = x(t)$ quale è l'andamento di questa funzione

<u>Analisi qualitativa</u> $\qquad \dot{x} = \sin x$

- campo vettoriale (sull'asse reale) ad ogni punto $x$, associo il vettore $\dot{x}$
- disegnando esplicitamente sull'asse $x$




(grafico di $\dot{x}$ vs $x$) $\qquad \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad \dot{x} > 0$

campo vettoriale $\qquad \leftarrow\leftarrow\leftarrow \quad \dot{x} < 0$ $\qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$

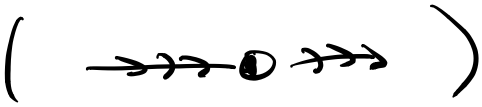
Questo è una rappresentazione grafica del flusso

Ai punti $\dot{x} = 0 \rightarrow$ non c'è nessun movimento : punti fissi / critici / equilibrio

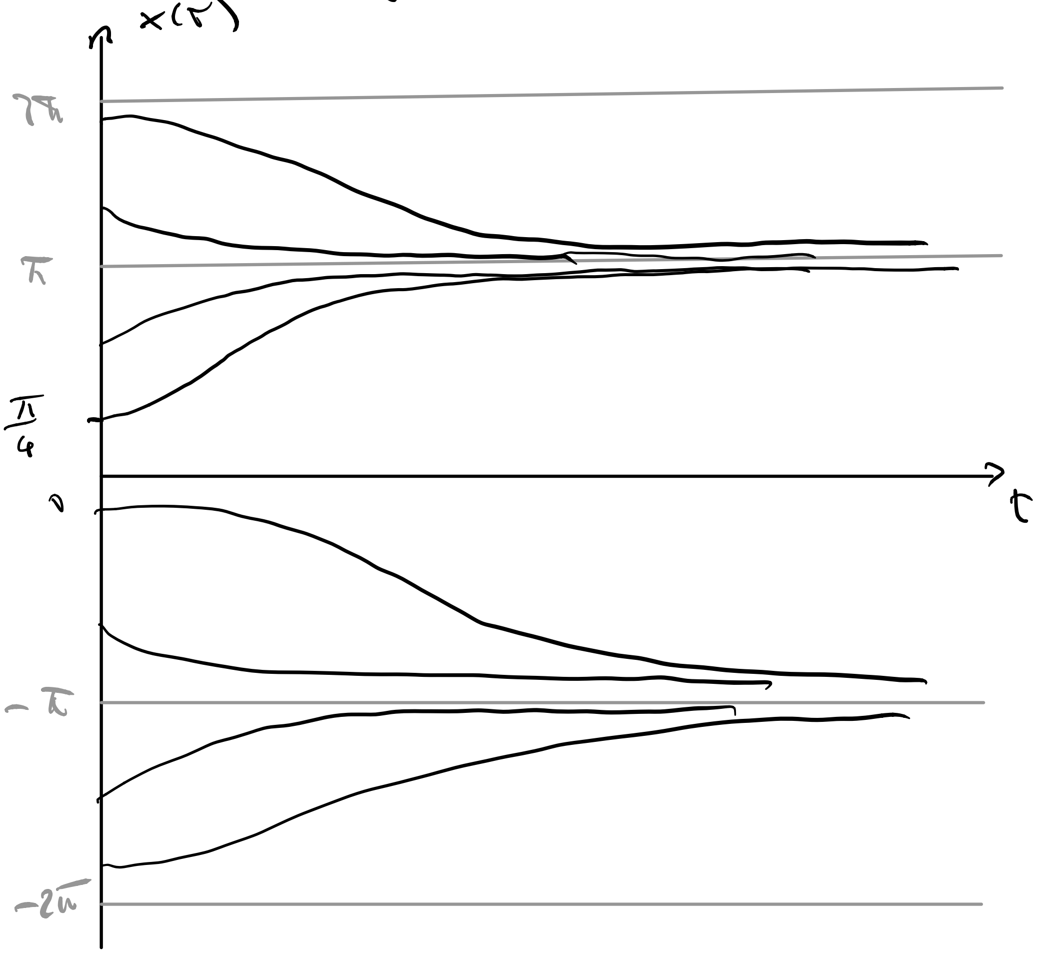
Li distinguiamo

stabile / attrattivo / pozzo

instabile / repulsivo / sorgente



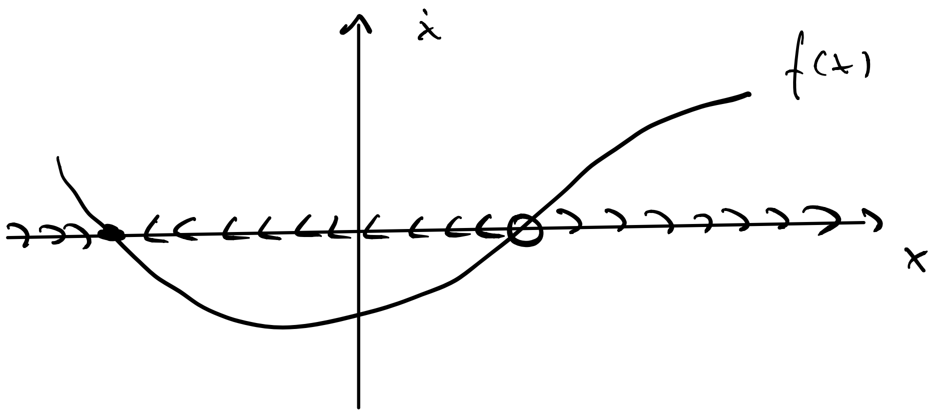
Cosa implica per $\dot{x} = \sin x$




- punti critici $\dot{x} = 0$
- prendiamo $x_0 = \frac{\pi}{4}$

→ analisi qualitativa

<u>Ritratto di fase</u> $\dot{x} = f(x)$




Asse reale $x$

↓

spazio delle fasi

$f(x)$ : velocità (locale) del flusso

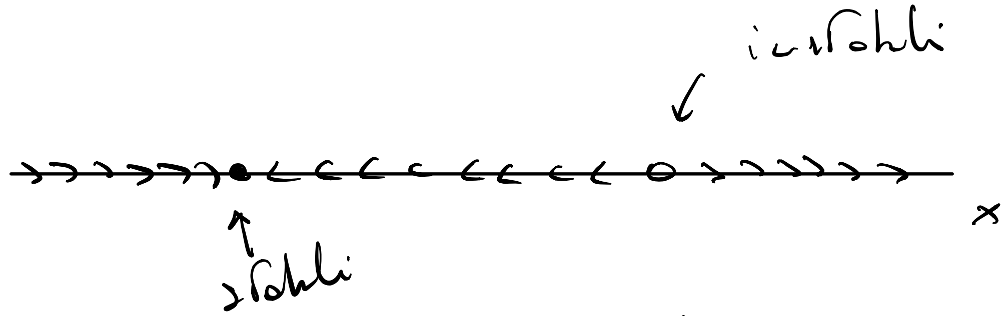
direzione $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$ se $f(x)>0$

$\leftarrow\leftarrow\leftarrow$ se $f(x)<0$

Prendiamo una condizione iniziale $x_0$

$\rightarrow$ seguiamo la sua evoluzione lungo il flusso $\Rightarrow$ traiettoria che parte da $x_0$

Ritratto di fase $\longrightarrow$ Tutte le traiettorie qualitative




$x^*$ t.c. $f(x^*) = 0$ punti fissi

<u>Esercizi</u> Ritratto di fase per

1) $\dot{x} = x^2 - 1$

2) $\dot{x} = x - \cos x$

(suggerimento per trovare pt critici $\rightarrow$ $x$, $\cos x$ separatamente)

<u>Esempio</u> Dinamica delle popolazioni

Malthus : $\dot{N} = rN$ $r > 0$ $N$ # individui

$\rightarrow$ crescita / decrescita esponenziale

Modello logistico: risorse limitate

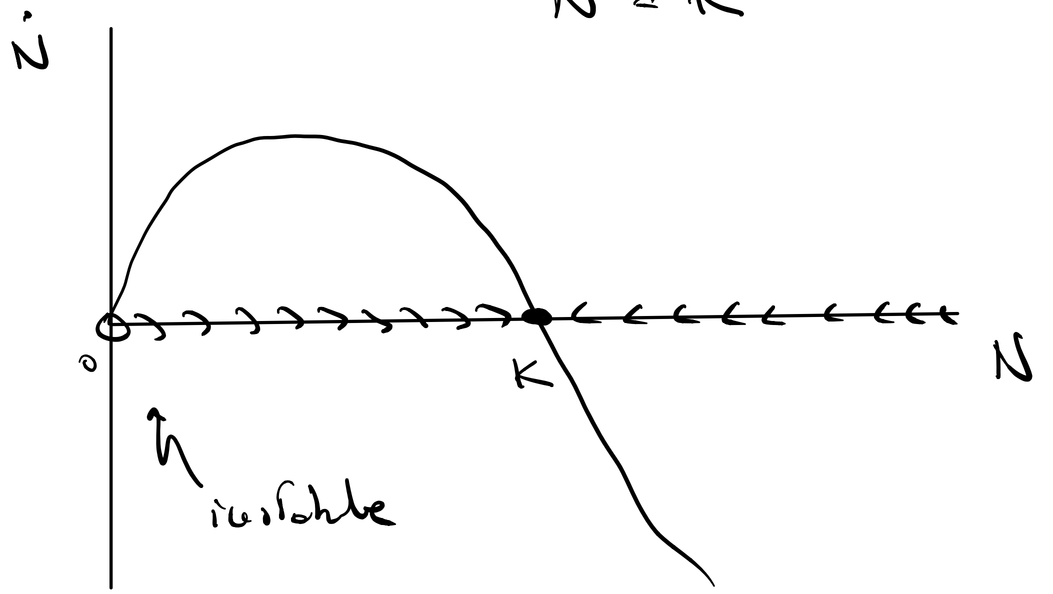
il tasso di crescita per persona $\frac{\dot{N}}{N}$

diminuisce linearmente con $N$

Equazione logistica: $\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$

$K > 0$

Punti fissi $N^* = 0$
$N^* = K$

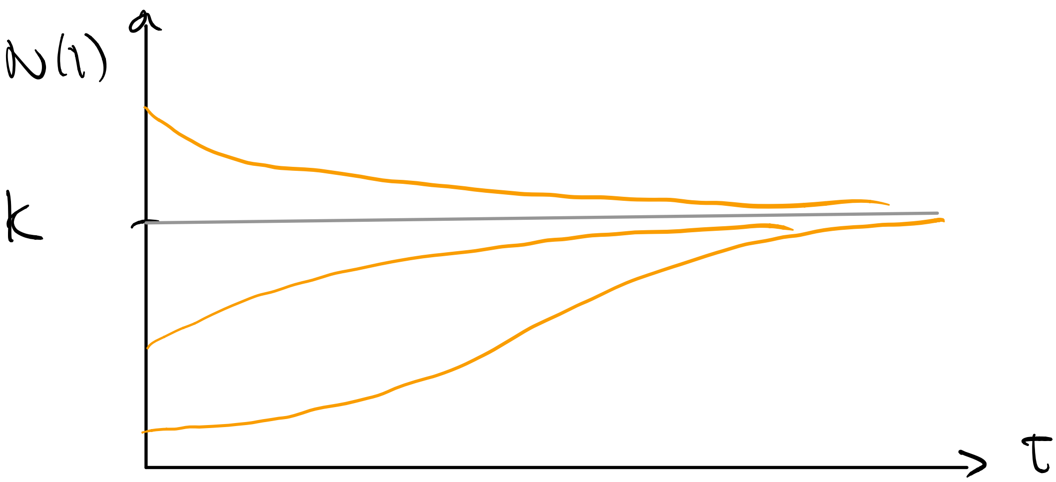



$N > 0$
$r > 0$
$1 - \frac{N}{K} > 0$
$\Rightarrow N < K$

$N^* = K$ attrattivo ; se $N_0 \neq 0$

$N(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} K$

la popolazione tende alla "capacità portante" $K$



# SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 18 MARZO 2020
- SECONDA PARTE

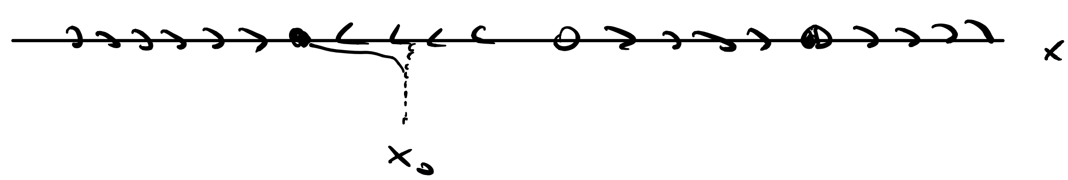
---

$\dot{x} = f(x)$ $\longrightarrow$ ritratto di fase

$\rightarrow$ determinare i punti fissi

$x^*$ tali che $f(x^*) = 0$ $\left( \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \right)$

Studiare il flusso




## Analisi lineare

Se abbiamo un punto fisso, possiamo ottenere un'idea più precisa sulla struttura locale del flusso <u>linearizzando</u>

Scriviamo $x(t) = x^* + y(t)$

$\uparrow$ perturbazione

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(x^* + y(\tau)\right) = \frac{d}{d\tau} y(\tau)$$

$$\dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\tau} y(\tau) = f(y(\tau) + x^*)$$
$$= f(x^*) + y\, f'(x^*) + O(y^2)$$

- $x^*$ punto fisso $\Rightarrow f(x^*) = 0$
- $y$ piccola perturbazione: lavorando al primo ordine in $y$
- assumiamo inoltre $f'(x^*) \neq 0$

Allora l'equazione che governa la perturbazione

$$\frac{d}{d\tau} y(\tau) = y(\tau)\, \underbrace{f'(x^*)}_{\text{costante}}$$

la perturbazione cresce esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$, decade exp se $f'(x^*) < 0$

se $f'(x^*) \neq 0$, è il segno della derivata prima al punto fisso a determinare la stabilità locale. Se invece $f'(x^*) = 0$

+ termini di ordine più elevato

Siccome le sol sono esponenziali

$\rightarrow \quad \eta(t) \sim e^{f'(x^*)\,t}$ $\quad t \sim \frac{1}{|f'(x^*)|}$

la quantità $\frac{1}{|f'(x^*)|}$ fissa la scala temporale del problema: determina il tempo $t$ nel quale $x(t)$ varia in modo significativo (in un intorno del punto fisso).

Def Un punto di equilibrio $x^*$ tale che $f'(x^*) \neq 0$, è detto IPERBOLICO (non-degenere)

Un sistema dinamico si dice iperbolico se tutti i punti fissi sono iperbolici

Esempio l'eq. logistica $\dot{N} = f(N)$

$$f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K} \Rightarrow \quad - f'(0) = r > 0 \text{ instabile}$$

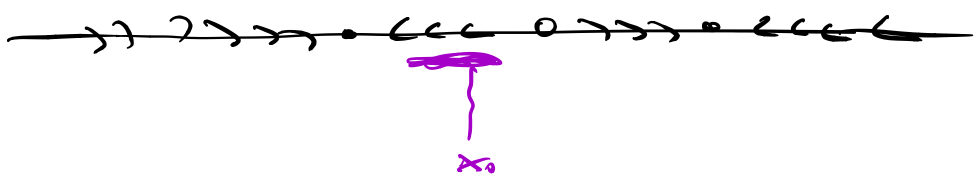
$$- f'(K) = -r < 0 \text{ stabile}$$

## Alcuni commenti

1) Sistemi $\dot{x} = f(x)$ non hanno soluzioni periodiche

→ le traiettorie sono monotone (o costanti)

quindi (se siamo su $\mathbb{R}$) non ci possono essere oscillazioni




2) Supponiamo di avere un potenziale, funzione $V$ tale che $f(x) = -\frac{dV}{dx}$

$$\left( V = V(x(t)) = -\int_0^x f(s)\,ds \right)$$

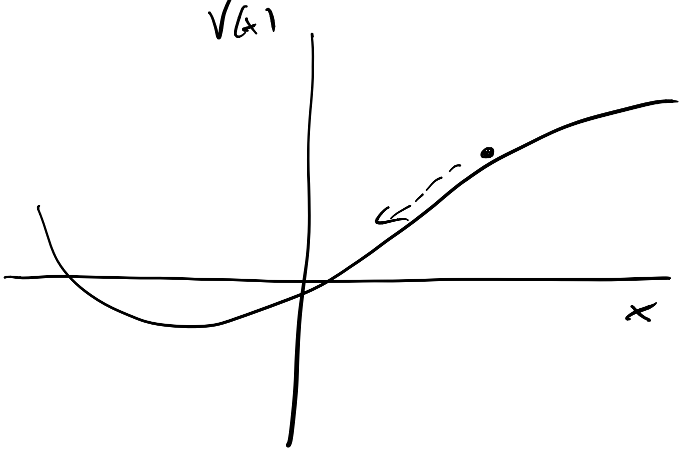
il potenziale decresce lungo le traiettorie

Infatti

$$\frac{d}{d\tau} V(x(\tau)) = \frac{d\,x(\tau)}{d\,t} \frac{d\,V(x)}{dx} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

$$\uparrow$$

$$\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$$




punti di eq.

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

e i minimi locali di V sono equilibri stabili

# BIFORCAZIONI

Supponiamo di introdurre un parametro

$\mu$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f_\mu (x(\tau))$$

Q: come cambia l'andamento qualitativo delle soluzioni al variare di $\mu$

$\mu$ : parametro di controllo

Supponiamo di avere $\mu^*$ t.c.

$$f_{\mu^*}(x^*) = 0 \quad e \quad f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0$$

($x^*$ punto fisso iperbolico)

Allora, il teorema della funzione implicita implica che il punto di fisso sia strutturalmente stabile = non può essere rimosso con una variazione dei parametri

[Ricordiamo: teo funzione implicita sotto quali condizioni un'eq del tipo $g(x,\mu)=0$ può essere risolta univocamente per $x$ : $x = x(\mu)$ ]

Nel nostro caso, $\exists$ un'unica funzione regolare $\bar{x}(\mu)$ t.c. $\mu \in U$ (aperto di $\mu^*$) tale che

$$\begin{cases} \bar{x}(\mu^*) = x^* \\ f_\mu(\bar{x}(\mu)) = 0 \end{cases}$$

identicamente in $\mu$

A parole: punti critici iperbolici permangono per piccole variazioni del parametro $\mu$

Viceversa: fenomeni interessanti per quei valori per cui il punto critico cessa di essere iperbolico

$f_\mu = f'_\mu = 0$ insieme