# SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 19 MARZO 2020
- PRIMA PARTE

---

Biforcazioni

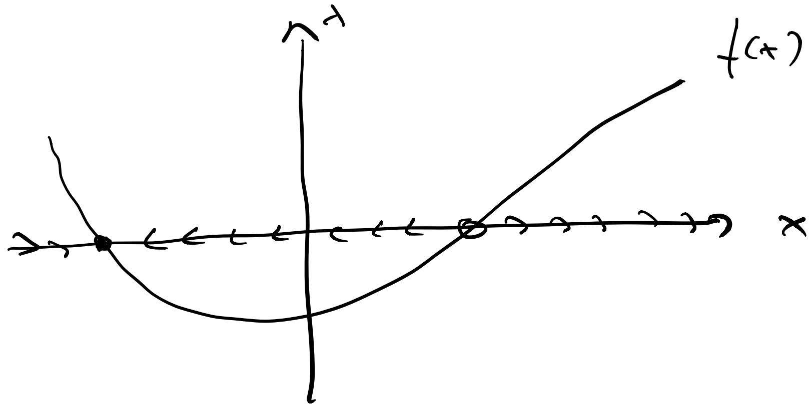
$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \longrightarrow \frac{d}{dt} x(t) = f_\mu (x(t))$$

1 parametro di controllo

come cambia l'analisi qualitativa al variare di $\mu$

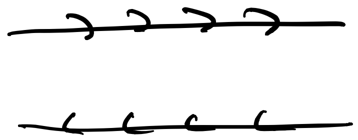
Recap $\dot{x} = f(x)$

Il ritratto di fase (phase portrait)




spazio delle fasi ($x$ a valori in $\mathbb{R}$)

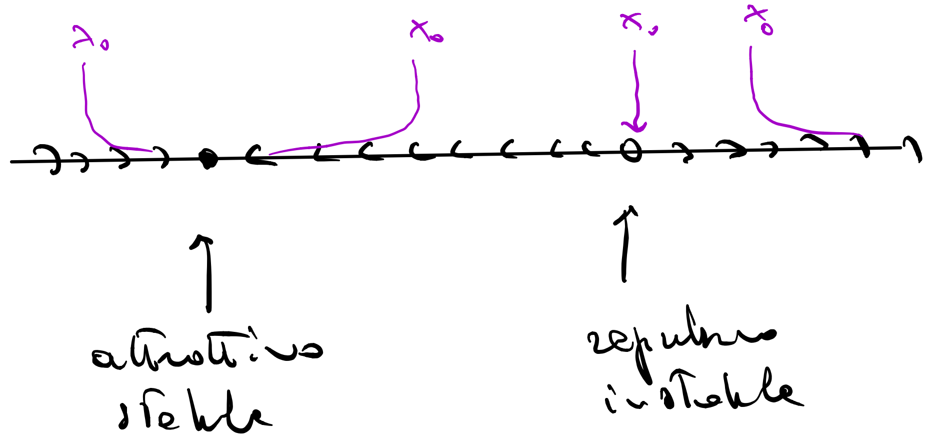
Punti fissi : $x^*$ per cui $f(x^*) = 0$

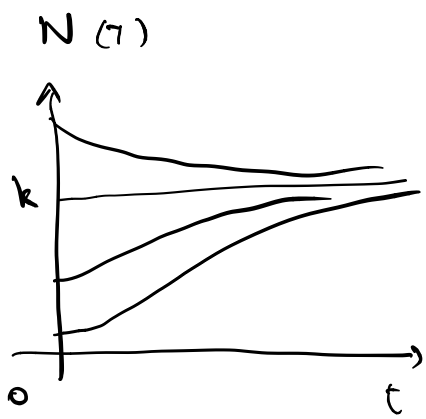


se $f(x) > 0$

se $f(x) < 0$

$f(x) = \dot{x}$ è rapidità con cui $x$ varia




logistica : $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$

$N^* = 0$ instabile

$N^* = K$ stabile

linearizzazione vicino ad un punto critico fisso

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau)) \quad \text{vicino} \quad x^*$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\tau} \eta(\tau) = \eta(\tau) \underbrace{f'(x^*)}_{\text{costante}} \qquad \eta(\tau) \sim e^{f'(x^*) t}$$

$$x(\tau) = x^* + \eta(\tau)$$

(lavoriamo al primo ordine in $\eta$)

$f'(x^*) \neq 0$ (iperbolici)

Come cambia quest'analisi al variare di parametri di controllo

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f_\mu(x(\tau))$$

assumiamo di avere $\mu^*$ tale che

$$f_{\mu^*}(x^*) = 0 \, , \quad f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0 \quad \text{(punto critico iperbolico)}$$

Usiamo il teorema della funzione implicita

$\Rightarrow$ esiste una funzione regolare $\bar{x}(\mu)$

$$\left( \left( \text{———}\underset{\mu^*}{\bullet}\text{———} \right) = U \, , \quad \mu \in U \right)$$

$$\begin{cases} \bar{x}(\mu^*) = x^* \\ f_\mu(\bar{x}(\mu)) = 0 \quad \leftarrow \end{cases}$$

$$f'_{\mu^*}(x^*) = 0$$

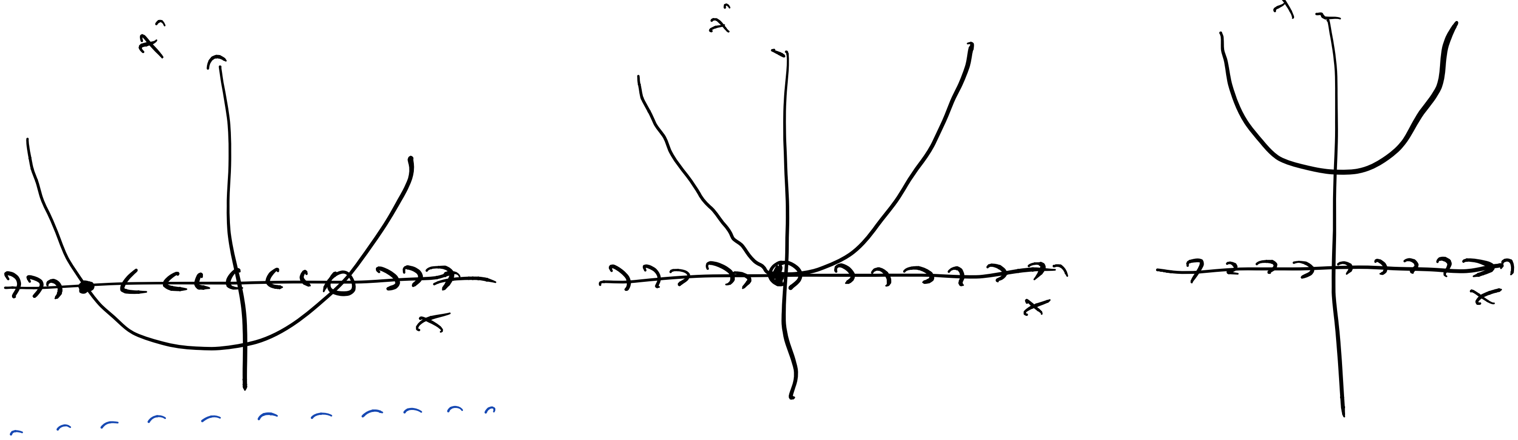
Vediamo esempi per cui $f_\mu = f'_\mu = 0$

# Biforcazione Tangente

$$\dot{x} = r + x^2 = f_r(x) = f(x; r)$$

Punti critici $\quad f_r(x) = 0 \Rightarrow x^2 = -r$

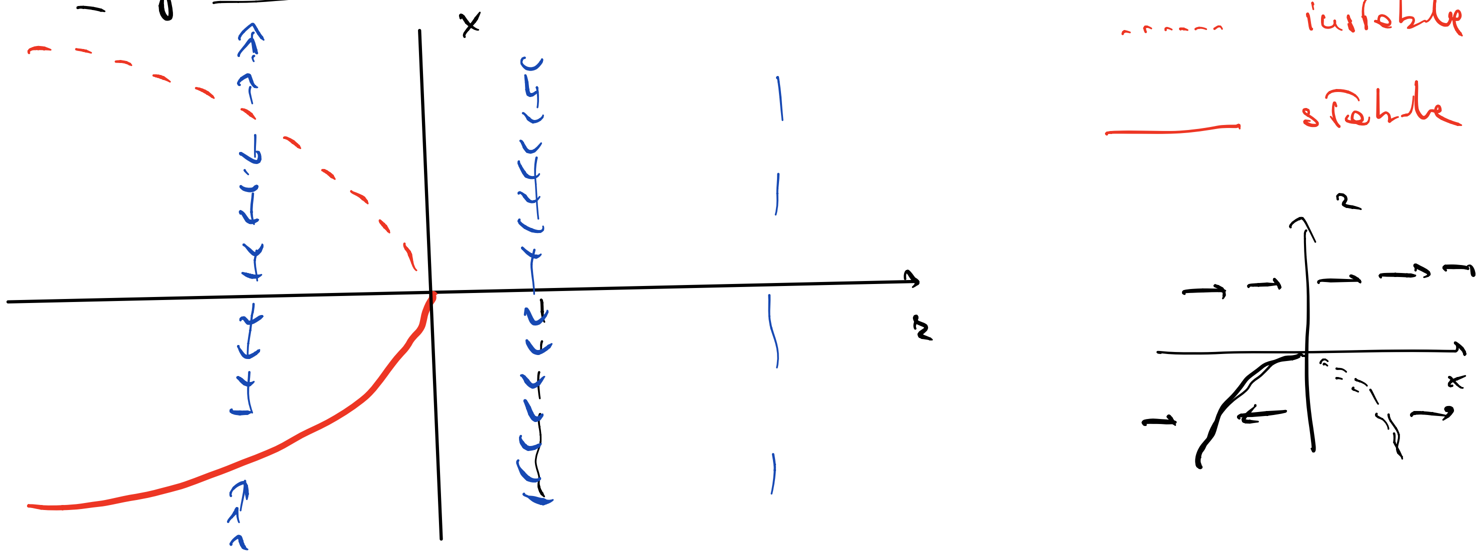
→ 3 casi possibili al variare del segno di $r$



$r < 0$ $\qquad\qquad$ $r = 0$ $\qquad\qquad$ $r > 0$

Abbiamo una differenza qualitativa tra i casi $r < 0$, $r > 0$. Diciamo che è avvenuta una biforcazione a $r = 0$

## Diagramma di biforcazione



# Forme normali

Consideriamo $\dot{x} = f(x; r)$, supponiamo che per $\begin{cases} x = x^* \\ r = r^* \end{cases}$ ci sia una biforcazione tangente.

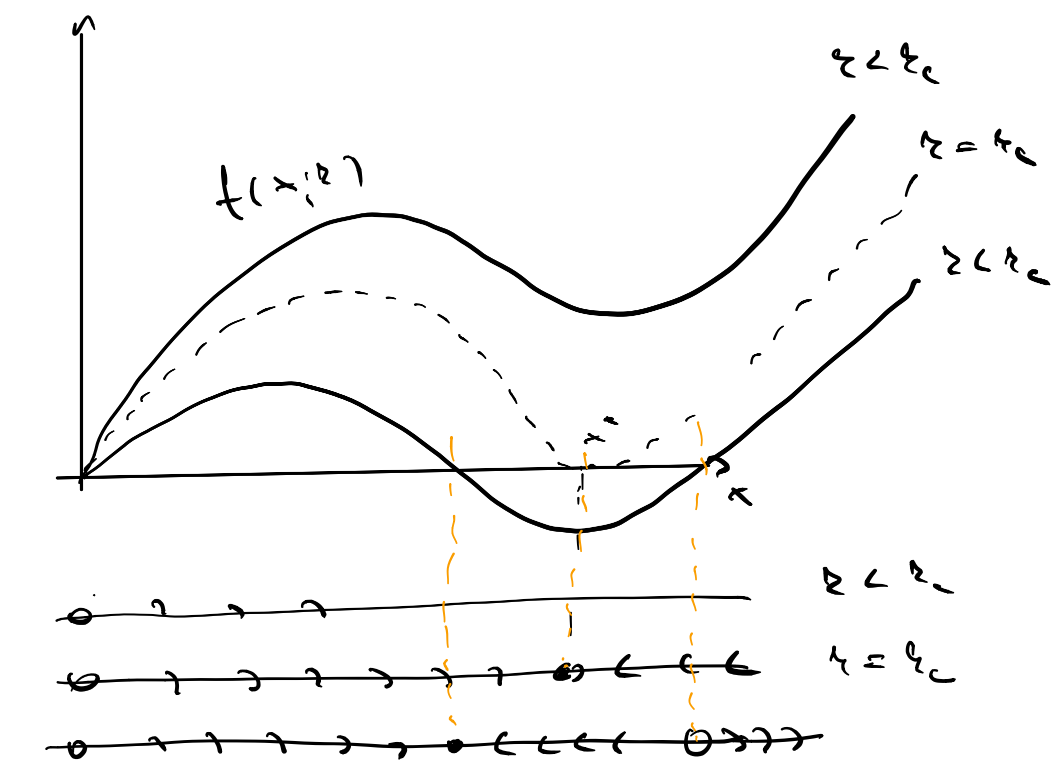
Si ha una biforcazione tangente quando

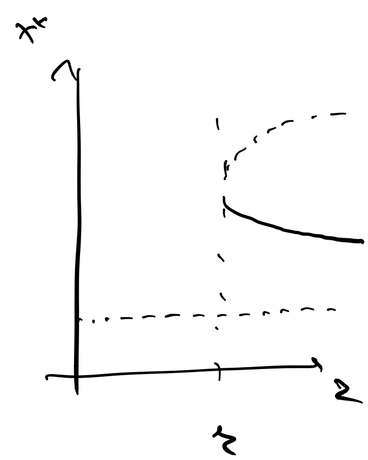
$$f(x^*; r_c) = 0 \quad , \quad f'(x^*; r_c) = 0$$

condizione che $x^*$ sia un punto critico — condizione di tangenza

(con le altre derivate $\neq 0$)

Esempio



Localmente (espandere $f(x;r)$)

$$\dot{x} = f(x;r)$$

$$f(x;r) = f(x^*;r_c) + (x-x^*)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,r_c} + (r-r_c)\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*,r_c} + \frac{1}{2}(x-x^*)^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*,r_c} + \cdots$$

[ Trascuriamo termini quadratici in $(r-r_c)$ e termini cubici in $(x-x^*)$ ]

$$\dot{x} = \alpha\,(r-r_c) + \beta\,(x-x^*)^2$$

$$\alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{x^*,r_c} \qquad \beta = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x^*,r_c}$$

In questo senso l'esempio $\dot{x} = r + x^2$ è "canonico": rappresenta la struttura che appare nella biforcazione tangente al primo ordine non banale

→ "forma canonica"

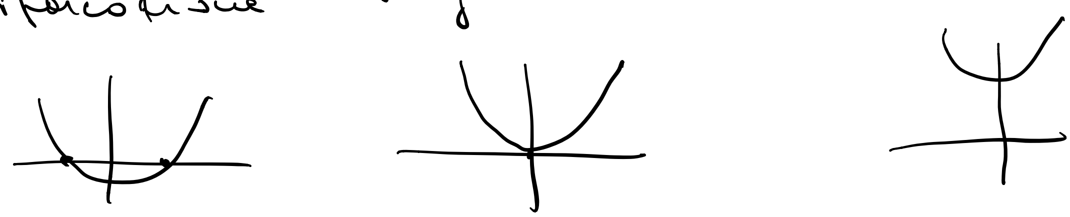
Idea : → classificare forme canoniche

# SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 19 MARZO 2020
- SECONDA PARTE

---

Biforcazione Tangente



$r<0$      $r=0$      $r>0$

o → o      •

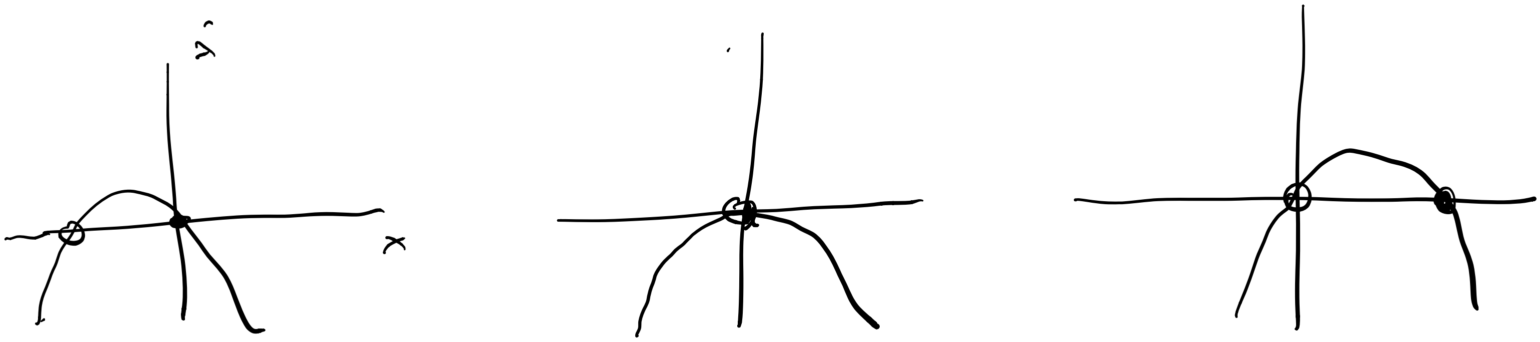
<u>Biforcazione Transcritica</u> in questo tipo di biforcazione cambia la stabilità di un punto fisso

La forma normale è

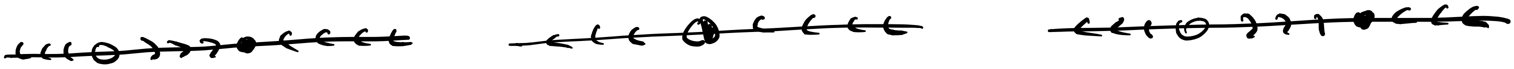
$$\dot{x} = rx - x^2 = x(r-x)$$

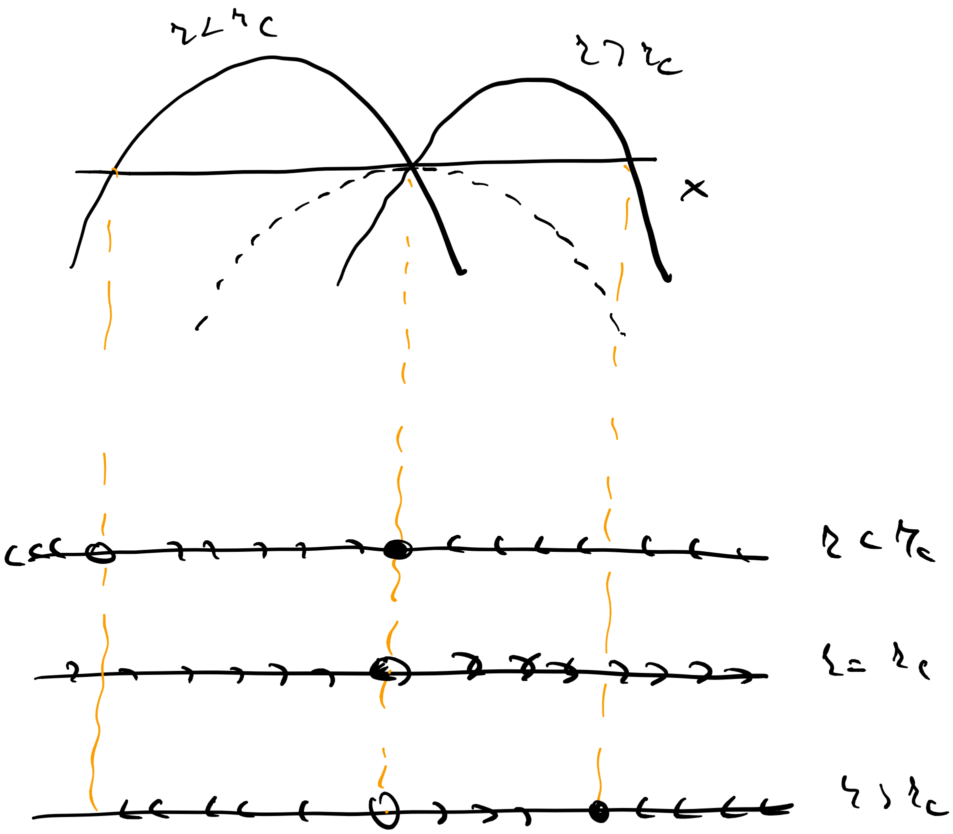
$x^* = 0$ punto critico indipendente dal valore di $r$

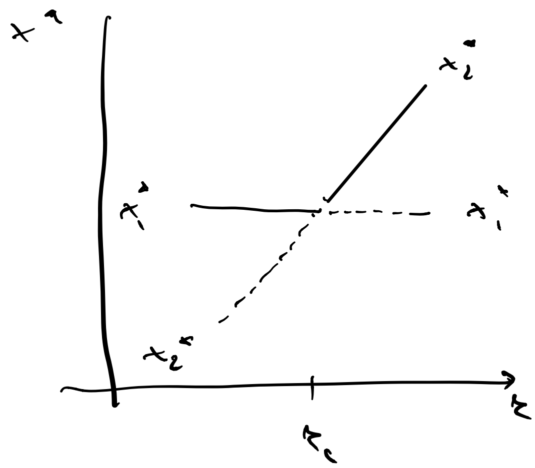
$x^* = r$




$r < 0$ $\quad$ $r = 0$ $\quad$ $r > 0$






$f(x; r)$ $\qquad$ $f(x^*; r_c) = 0$ $\qquad$ $f'(x^*, r_c) = 0$

Forma normale $\quad \dot x = rx - x^2$

$\rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial r}\Big|_{r_c, x^*} \neq 0$

Esempio $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$

biforcazione transcritica a $x=0$ : per quali valori dei parametri?

$x=0$ punto fisso

Vicino a $x=0$ (localmente)

$$\dot{x} = x - a\left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2\right) + O(x^3)$$

$$= (1-ab)x + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^2 + O(x^3)$$

$\dot{x} = rx - x^2$ $\quad$ $x=0$, $x=r$

Secondo punto fisso: (approssimato)

$$(1-ab) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x = 0 \Rightarrow x^* \simeq \frac{2(ab-1)}{ab^2}$$

Biforcazione avviene per $\boxed{ab=1}$

→ curva di biforcazione

Biforcazione a forchetta (Pitchfork)

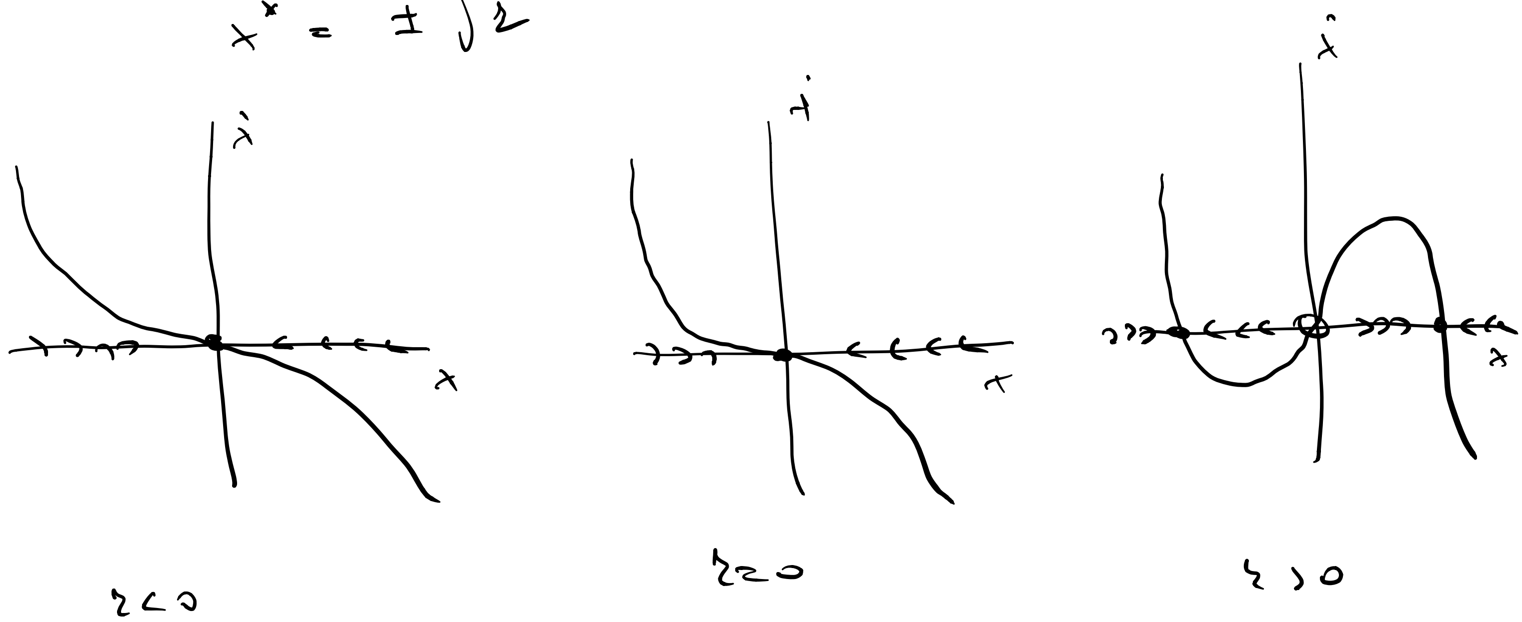
di due tipi: super-critica o sub-critica

Caso <u>super-critico</u>: la forma normale

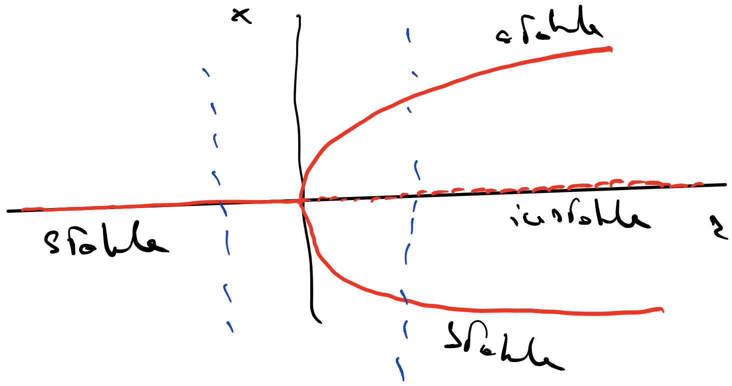
è $\dot{x} = rx - x^3$

Notiamo: $x \longrightarrow -x$ (simmetria)

- il punto critico $x^* = 0$ è punto critico per ogni valore di $r$. Per $r<0$ è l'unico pto di equilibrio
  $\left[\ rx - x^3 = x(r - x^2) \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x^2 = r \end{matrix}\ \right]$
- lo stesso per $r=0$
- se $r>0$: l'origine diventa instabile e appaiono 2 nuovi punti critici $x^* = \pm\sqrt{r}$



# Diagramma di biforcazione



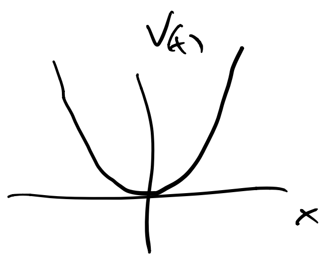

## Commento

$\dot{x} = rx - x^3$ → potenziale

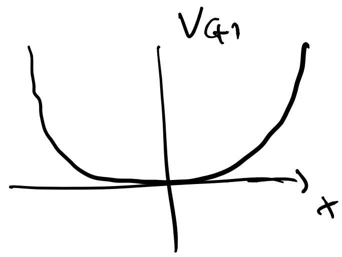
( $\dot{x} = f(x)$ , $f(x) = -\frac{dV}{dx}$ )

$-\frac{dV}{dx} = rx - x^3 \rightarrow V(x) = -\frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{4} x^4$

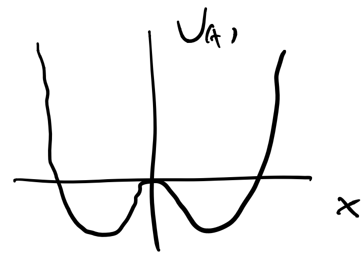
(lasciamo stare la costante)




$r < 0$



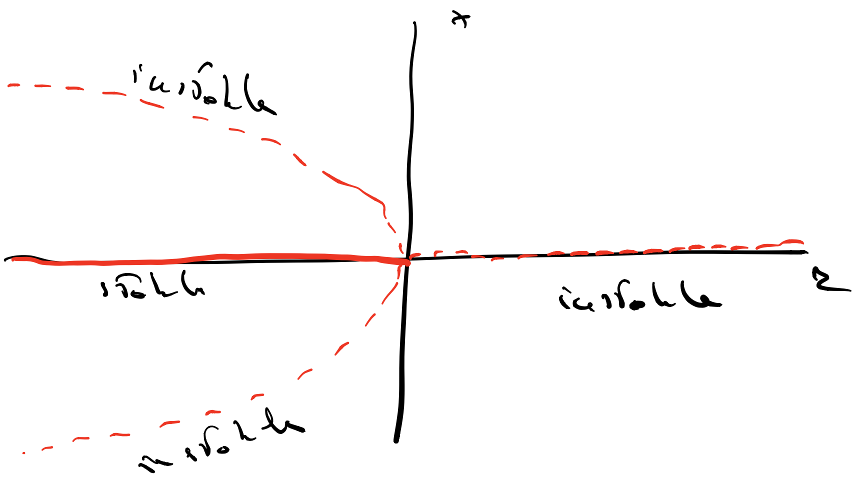

$r = 0$




$r > 0$

Discorso analogo per la biforcazione subcritica

$\dot{x} = rx + x^3$



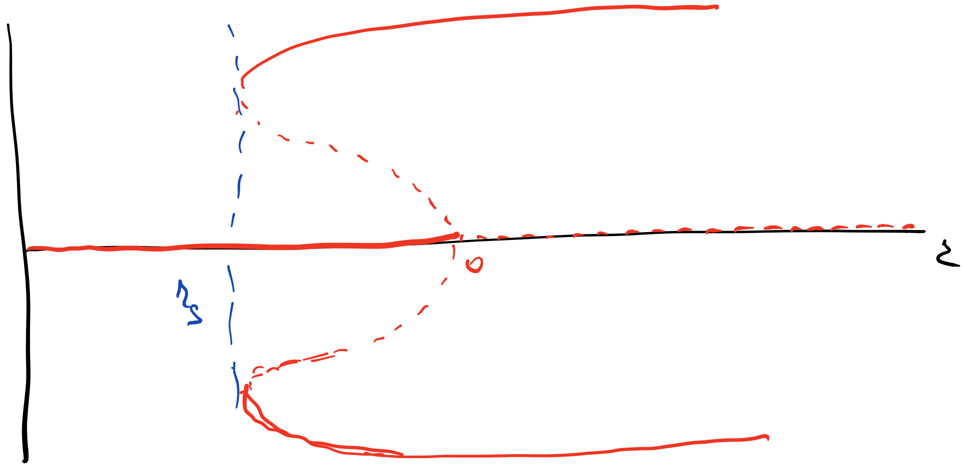

adesso

$x^* = \pm\sqrt{-r}$

più fissi instabili ed esistono solo per $r < 0$

Esercizio diagramma di biforcazione per

$$\dot{x} = r x + x^3 - x^5 = x(r + x^2 - x^4)$$




$r_s$ il valore per il quale nascono punti fissi $\neq 0$