SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 25 MARZO 2020
- PRIMA PARTE

Sistemi dinamici unidimensionali

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad$ x a valori in $\mathbb{R}$

↳ analisi qualitativa

Grafico del flusso

$\mathbb{R}$ $\qquad$ Ritratto di fase

$\dot{x} = 0$ → punti critici (equilibrio, fissi)

stabili

instabili

$\dot{x} = f(x; r)$

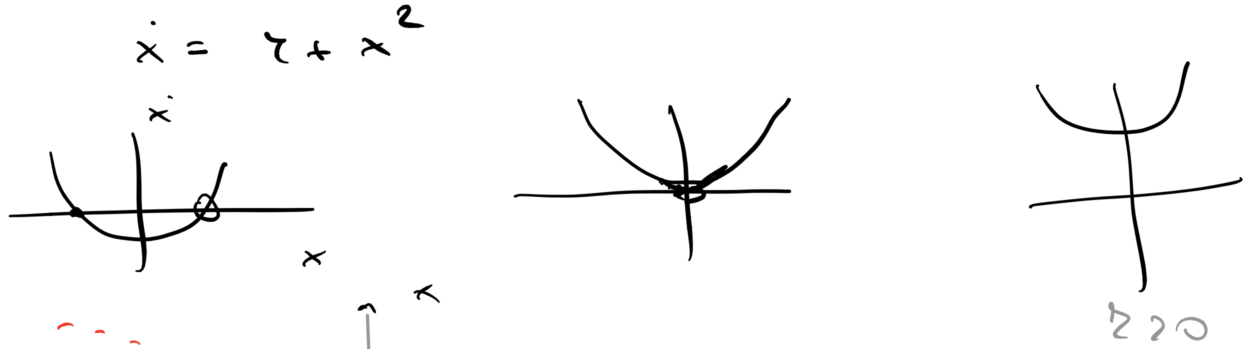
Biforcazioni = cambi qualitativi

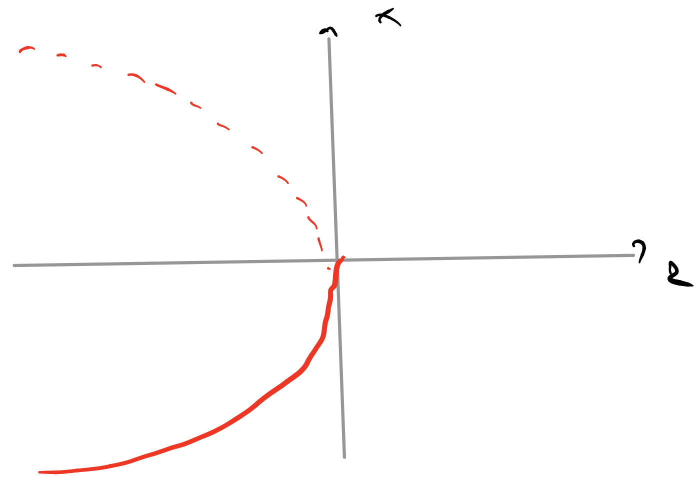
della dinamica al variare

del parametro

Biforcazione Tangente

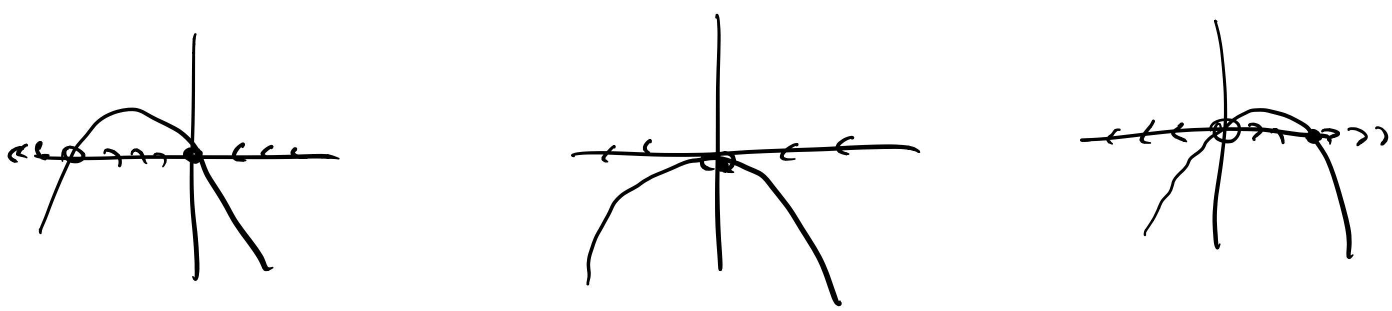
$$\dot{x} = r + x^2$$

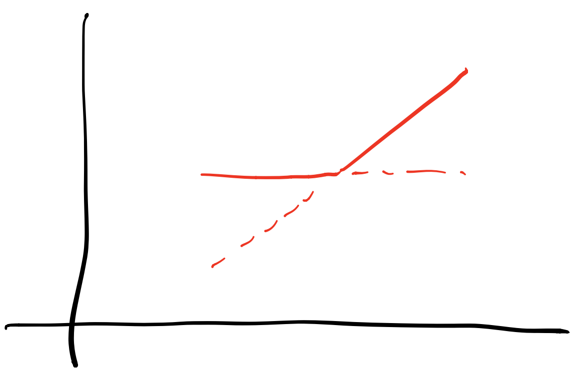




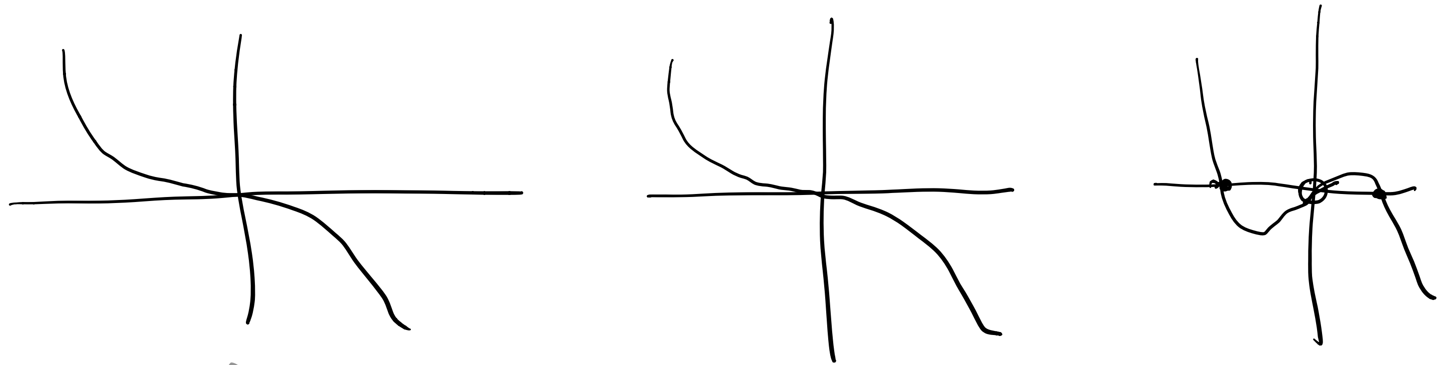
al variare del parametro r, appaiono / scompaiono due punti critici

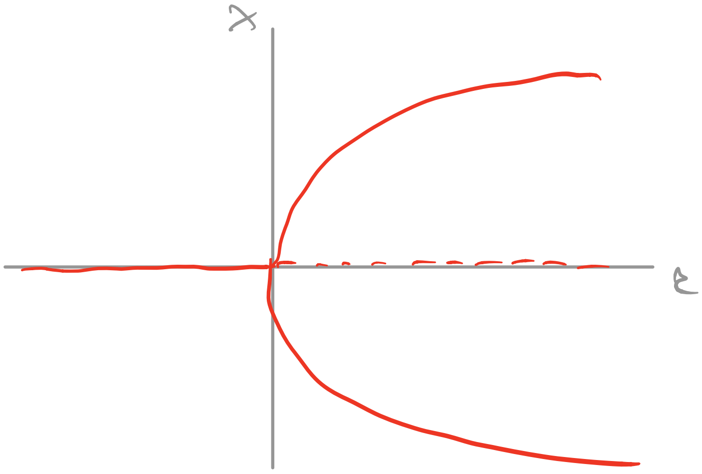
Biforcazione Transcritica





Biforcazione a forchetta $\dot{x} = rx - x^3$





$\dot{x} = f(x, r) \longrightarrow$

$$\dot{x} = r + x^2$$
$$\dot{x} = rx - x^2$$
$$\dot{x} = rx + x^3$$

$$\dot{x} = f(x, r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right| + (r - r_c) \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right| + \cdots$$

Biforcazione imperfetta

$$\dot{x} = rx - x^3 + h$$

$h=0 \longrightarrow$ biforcazione a forchetta

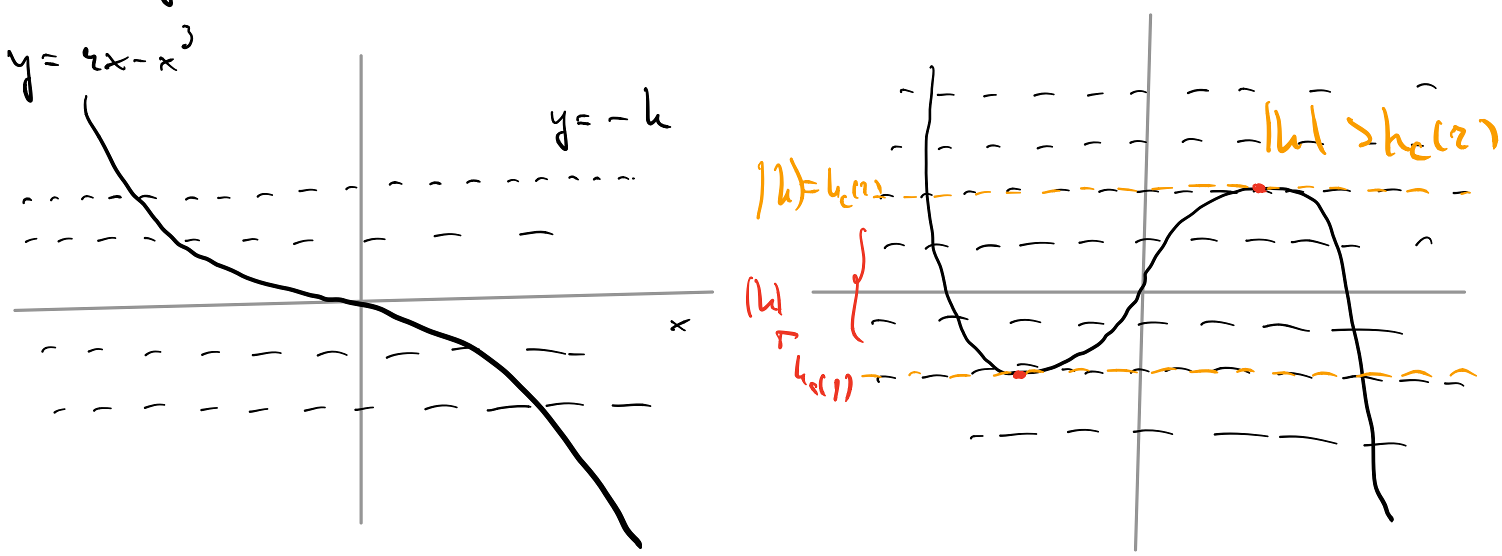
[$\dot{x} = rx - x^3$ ha una simmetria per $x \leftrightarrow -x$]

$h \neq 0$ la simmetria è "rotta"

Punti fissi : approccio grafico

$y = rx - x^3$

$y = -h$



$r \leq 0$ $\quad$ $r > 0$

Valore $h_c(r)$ per il quale c'è una biforcazione (due punti critici vengono creati / distrutti)

max locale $\frac{d}{dx}(rx - x^3) = r - 3x^2 = 0$

$\rightarrow \quad x_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

Per questo valore $\quad \varepsilon x_{max} - (x_{max})^3 = \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

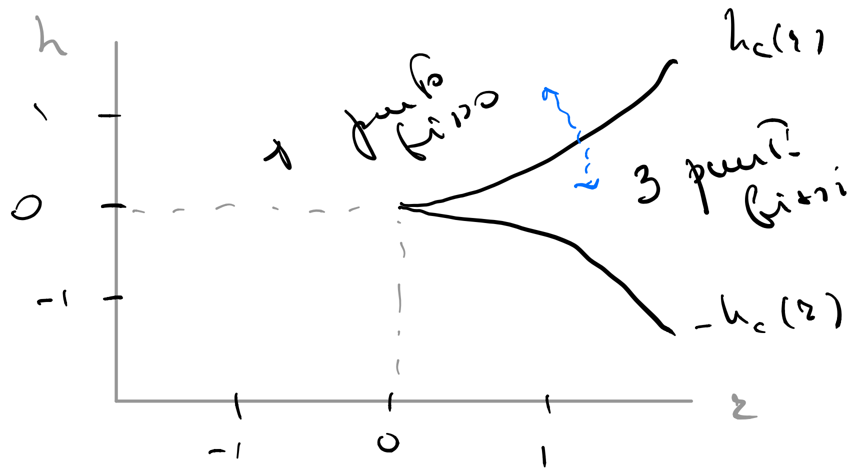
Abbiamo una biforcazione tangente

$$h = \pm h_c(\varepsilon) \qquad h_c(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

per $|h| < h_c(\varepsilon)$: 3 punti critici

per $|h| > h_c(\varepsilon)$: 1 punto critico

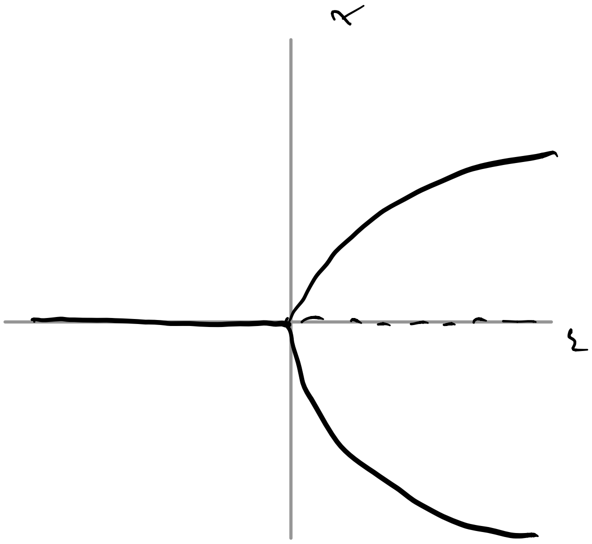
Curva di biforcazione nel piano (h, ε)



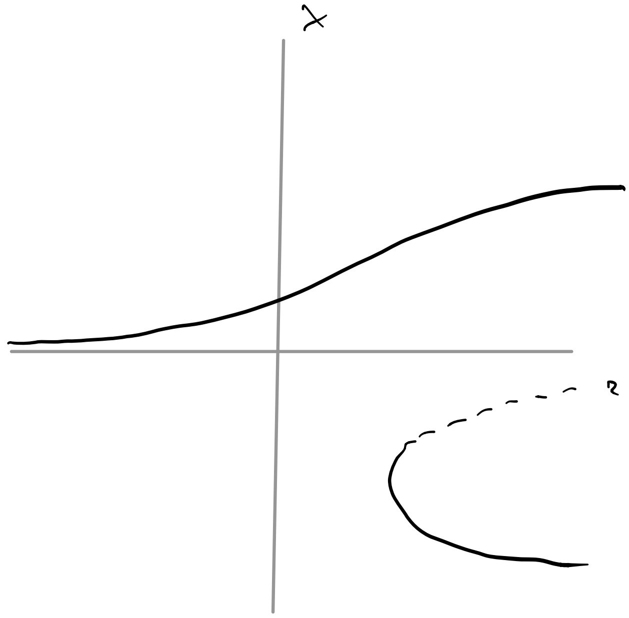
Le due curve $\pm h_c(\varepsilon)$ si incontrano tangenzialmente in $(\varepsilon, h) = (0, 0)$ dove c'è una cuspide

Guardiamo i diagrammi ponendo ε o h ad un valore fisso

$$\dot{x} = h + \varepsilon x - x^3$$



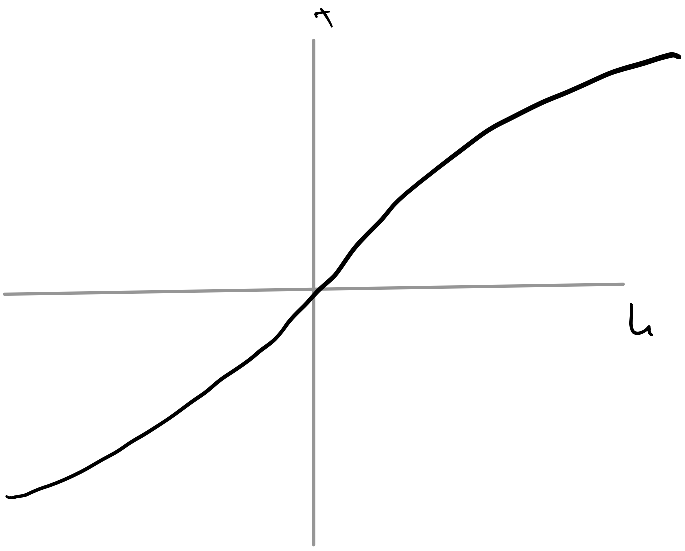
$h = 0$



$h \neq 0$

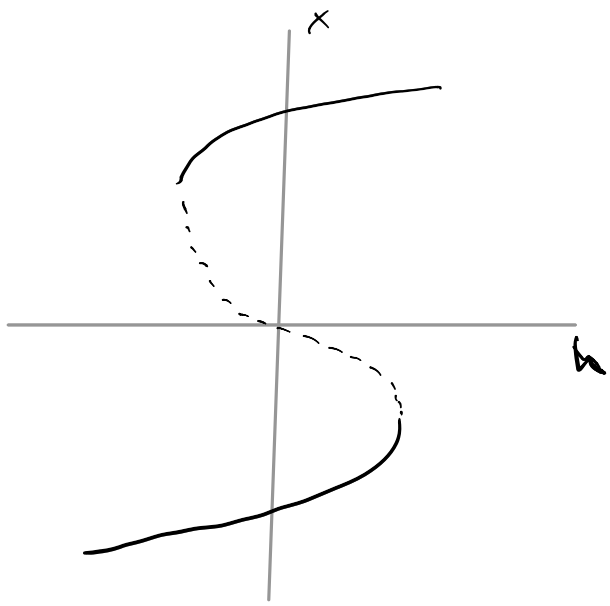
biforcazione mancata

Fissiamo ε



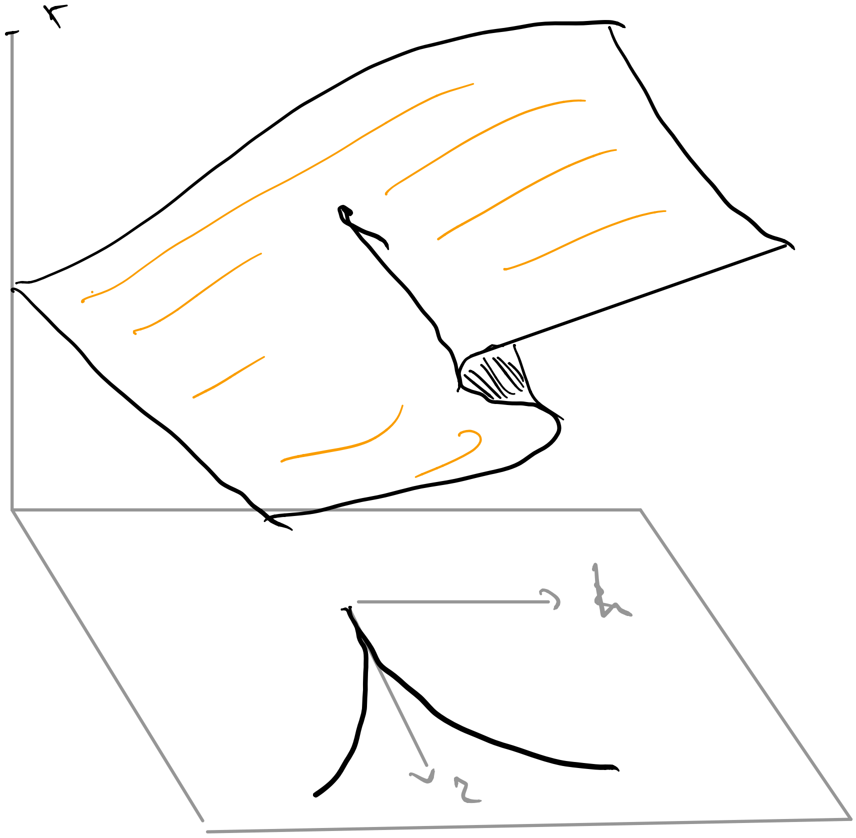
$\varepsilon \leq 0$

1 punto fisso $\forall\, h$



$\varepsilon > 0$

3 punti fissi quando $|h| < h_c(\varepsilon)$
altrimenti 1 solo



"catastrofe di tipo "cuspide""

i due rami della biforcazione tangente si incontrano in una cuspide

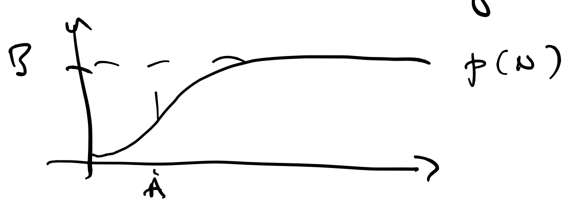
SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 25 MARZO 2020
- SECONDA PARTE

Invasione di cavallette

$$\dot{N} = \underbrace{RN\left(1-\frac{N}{K}\right)}_{\text{logistico}} - p(N)$$

predatori (uccelli)



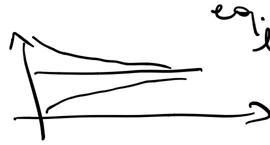
$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$$

Ridefinire le variabili

$$\tau = \frac{B}{A} t \quad , \quad r = \frac{RA}{B} \qquad k = \frac{K}{A}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}}$$

↑ eq logistica

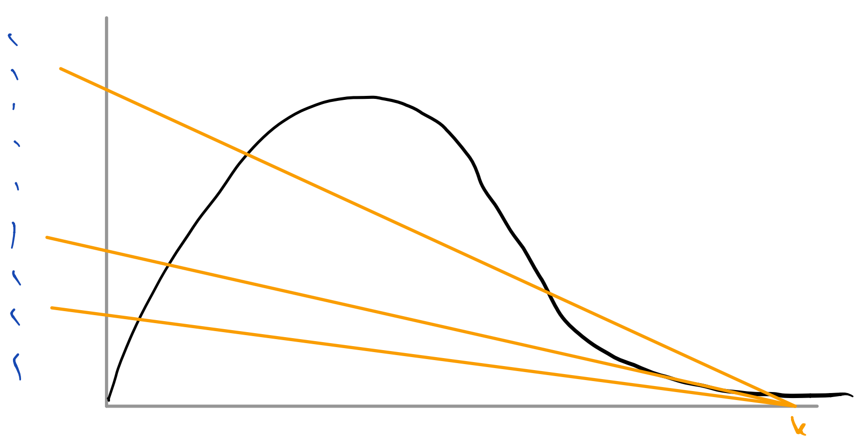


Punti fissi

- un punto fisso $x^* = 0$ (instabile)
- altri punti fissi, sono soluzione

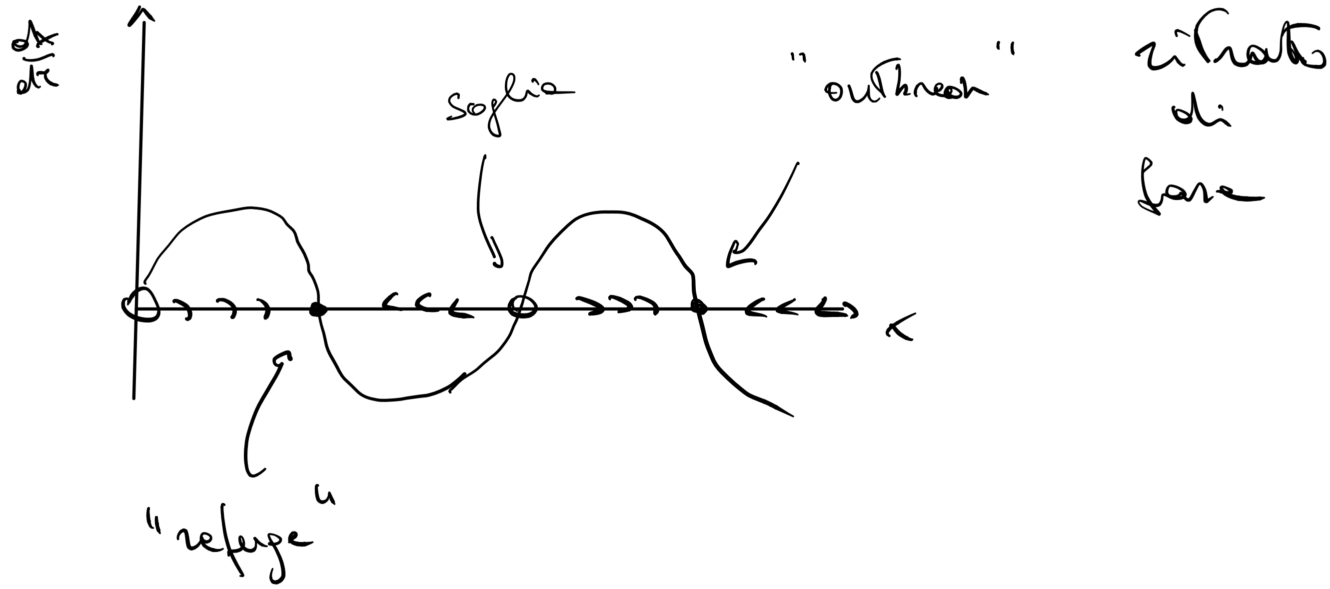
di $$r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\text{indipendente dai parametri}}$$

per k sufficientemente piccolo, solo una intersezione



Per k grande al variare di r avremo 1 o 3 punti fissi

Caso con 3 punti critici (oltre a $x^* = 0$)



Curve di biforcazione: vogliamo vedere quando $r\left(1-\frac{x}{k}\right)$ e $\frac{x}{(1+x^2)}$ si intersecano tangenzialmente

1) $$r\left(1-\frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

2) $$\frac{d}{dx}\left[r\left(1-\frac{x}{k}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]$$

$$-\frac{r}{k} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

da 1) $$r = \frac{r}{k}x + \frac{x}{1+x^2} =$$

$$= -x\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{(1+x^2)} = \frac{-x+x^3+x+x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} \qquad\qquad r = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}$$

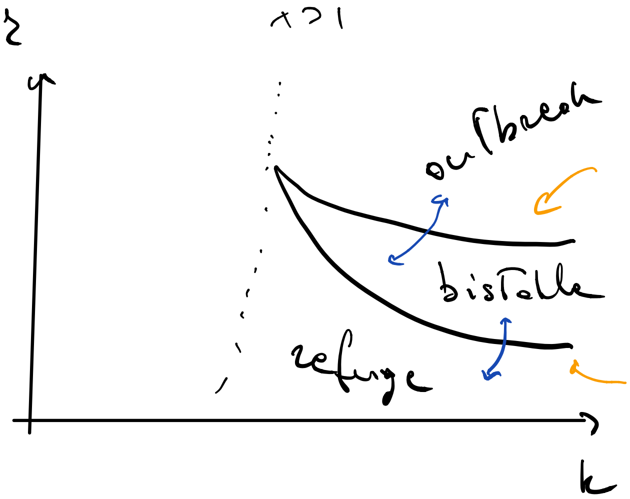
$$\frac{1}{k} = -\frac{1}{r}\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1+x^2)^2}{2x^3}\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$k = \frac{2x^3}{x^2-1} > 0$$

Per ogni x $[x>1]$

$(k(x), r(x))$

$$\begin{cases} k(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1} \\[2ex] r(x) = \dfrac{2x^3}{(1+x^2)^2} \end{cases}$$



FLUSSI SUL CERCHIO

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad\longleftrightarrow\qquad$ $\dot{\theta} = f(\theta)$

x a valori in $\mathbb{R}$ $\qquad$ θ a valori in S^1

$(f(\theta+2\pi) = f(\theta))$

campo vettoriale associa un vettore ad ogni punto di $\mathbb{R}$

campo vettoriale che associa un vettore ad ogni punto di S^1

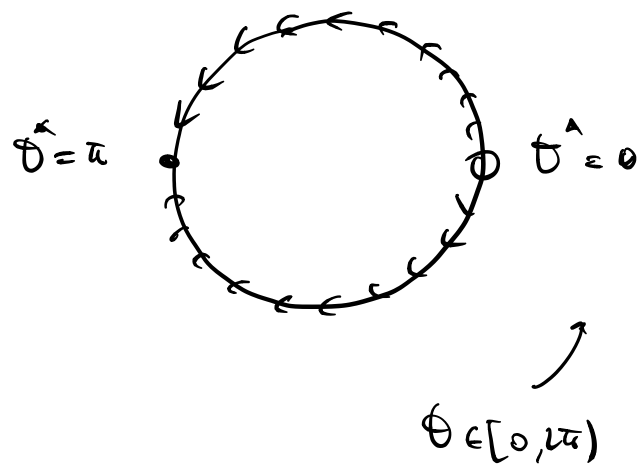
Esempio $\dot\theta = \sin\theta$

punti fissi

$\theta^* = 0$, $\theta^* = \pi$

semicerchio sup $\sin\theta > 0$

" inf $\sin\theta < 0$



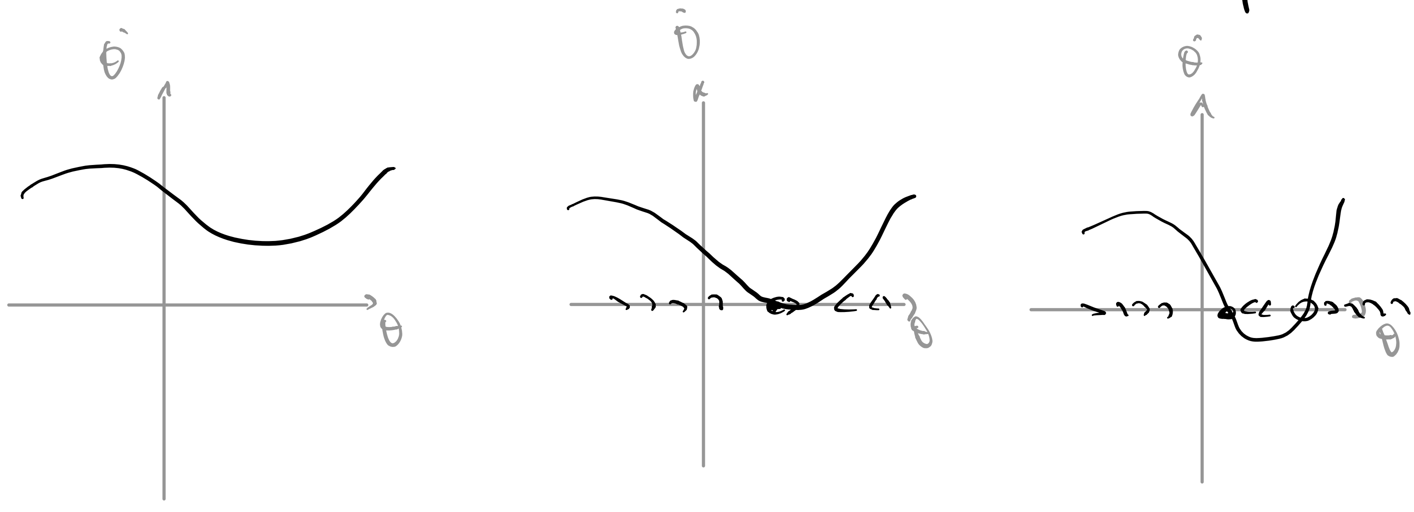
Esempio: $\dot\theta = \omega$ costante

$\theta(t) = \omega t + \theta_0$ periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

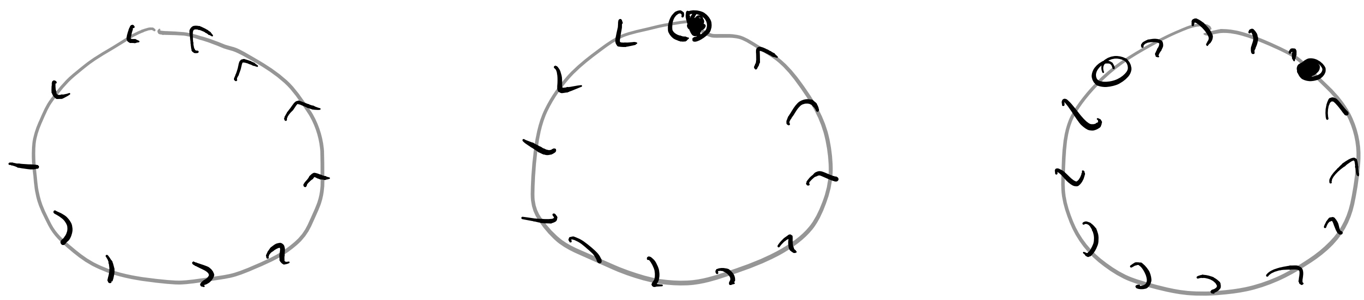
$\dot\theta = \omega - a\sin\theta$

$\omega > 0$

$a \geq 0$ ($a = 0$ caso precedente)



$a < \omega$ $a = \omega$ $a > \omega$



Per $a < \omega$ ci sono oscillazioni, di periodo

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin\theta} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$