SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 22 APRILE 2020
- PRIMA PARTE

SISTEMI DINAMICI LINEARI

→ sistemi di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = f(x)$$

il campo vettoriale determinato da f è una funzione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

→ può essere rappresentata da una matrice : $A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n) = Mat(n \times n; \mathbb{R})$

$f(x) = Ax \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

Sistema dinamico diventa

$$\dot{x} = Ax$$

Idea: supponiamo v autovettore di A

$Av = \lambda v$. Allora $x(t) = c(t)\, v$,

vediamo $\dot{x}(t) = \dot{c}(t)\, v = A x(t) = A\, c(t)\, v$

$$= c(t)\, \lambda\, v$$

$\longrightarrow \dot{c}(t) = \lambda\, c(t) \rightsquigarrow c(t) = c_0\, e^{\lambda t}$

Allora cerchiamo $Av = \lambda v$

$\longrightarrow (A - \lambda \underset{n \times n}{I_d})$ ha ker $\neq 0$

e quindi $\det(A - \lambda I_d) = 0 = p(\lambda)$

"polinomio caratteristico"

Risolvere $\dot{x} = Ax \longrightarrow$ dipende dallo spettro di A.

Autovalori reali & distinti

Teo Sia A un operatore lineare su $\mathbb{R}^n$ con n autovalori distinti & reali.

Allora $x' = Ax$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

ha un'unica soluzione. Questa ha la forma $x_i(t) = c_{i1} e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in} e^{t\lambda_n}$

dove c_{ij} sono dipendenti da x_0

<u>Dim</u> Per ipotesi $\exists$ matrice invertibile Q tale che $QAQ^{-1} = B = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\text{autovalori}})$

Poniamo $y = Qx$

Allora: $y' = Qx' = QAx = \overbrace{QA(Q^{-1}y)}^{B}$

$= By$

$y' = By \to$ sistema $y_i' = \lambda_i y_i \quad i = 1, \dots, n$

con soluzione $y_i(t) = y_i(0) e^{t\lambda_i}$

Poniamo $y(0) = Qx_0$

Notiamo che $y = Qx$ implica

$x(t) = Q^{-1}\left(y_1(0) e^{\lambda_1 t}, \dots, y_n(0) e^{\lambda_n t}\right)$

cioè $x_i(t) = c_{i1} e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in} e^{t\lambda_n}$

Adesso deriviamo

$x' = Q^{-1} y' = Q^{-1} By = Q^{-1}(QAQ^{-1}) y$

$$= A Q^{-1} y = A x$$

con $\underline{x(0)} = Q^{-1} y(0) = Q^{-1} Q x_0 = \underline{x_0}$

$\blacksquare$

Ricordiamo dall'algebra che se abbiamo n autovettori indipendenti $v_1, \dots, v_n$, la matrice $P = [v_1 \ \dots \ v_n]$ che ha gli autovettori come colonne, è non singolare. La matrice Q nella dim è $Q = P^{-1}$, cioè $y = Qx = P^{-1}x$. Allora se

$$\underline{y(\tau) = \begin{pmatrix} a_1 e^{\tau \lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{\tau \lambda_n} \end{pmatrix}} \Rightarrow \underbrace{x(\tau) = P y(\tau)}_{\tau = 0 \qquad \tau = 0}$$

Con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, vediamo che possiamo risolvere per i coefficienti come $\underline{a = P^{-1} x_0}$

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

da cui $B = \operatorname{diag}(1, 2, -1)$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = -y_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1(\tau) = a e^{\tau} \\ y_2(\tau) = b e^{2\tau} \\ y_3(\tau) = c e^{-\tau} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \lambda = 1, 2, -1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = 2$ $\qquad$ $\lambda = -1$

Quindi la matrice che cerchiamo

è $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la soluzione

$$x(t) = P y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{t} \\ b e^{2t} \\ c e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 a e^{t} \\ -2a e^{t} + b e^{2t} \\ a e^{t} + c e^{-t} \end{pmatrix}$$

Troviamo a, b, c in funzione di x_0

risolvendo

$$x_1(0) = 2a = x_{01}$$

$$x_2(0) = -2a + b = x_{02}$$

$$x_3(0) = a + c = x_{03}$$

Commento: altro modo:

$x_i(t) = \sum_j c_{ij} \exp(t \lambda_j)$ e

sostituiamo in $x' = Ax$, $x(0) = x_0$.

$\rightarrow$ eq. algebriche per c_{ij}

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 22 APRILE 2020
- SECONDA PARTE

Sistemi lineari $x' = Ax$

<u>Autovalori complessi</u>

Supponiamo che A abbia autovalori complessi distinti: $\alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$

Siccome il polinomio caratteristico ha coefficienti reali, anche $\alpha - i\beta$ è autovalore

In particolare:

$$Av = (\alpha + i\beta)v$$

$$A\bar{v} = \overline{Av} = \overline{(\alpha + i\beta)v} = (\alpha - i\beta)\bar{v}$$

Consideriamo A $2m \times 2m$, con autovalori distinti $\alpha_j \pm i\beta_j$ $j = 1, \dots, m$

La matrice A può essere messa in forma

canonica :

$$w_{2j-1} := \frac{1}{2}(v_j + \bar{v}_j) = \operatorname{Re} v_j$$

$$w_{2j} := -\frac{i}{2}(v_j - \bar{v}_j) = \operatorname{Im} v_j$$

<u>Lemma</u> $\{w_i\}$ sono linearmente indipendenti

<u>Dim</u> Segue dal fatto che lo sono i $\{v_i\}$

Per assurdo

$$\sum_1^n (c_j w_{2j-1} + d_j w_{2j}) = 0$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^n \left(c_j (v_j + \bar{v}_j) - i d_j (v_j - \bar{v}_j) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^n \left((c_j - i d_j) v_j + (c_j + i d_j) \bar{v}_j \right) = 0$$

$$\iff c_j \pm i d_j = 0 \iff c_i, d_i = 0$$

Studiamo l'azione di A :

$$A w_{2j-1} = \frac{1}{2}(A v_j + A \bar{v}_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((\alpha + i\beta) v_j + (\alpha - i\beta) \bar{v}_j \right)$$

$$= \frac{\alpha}{2}(v_j + \bar{v}_j) + \frac{i\beta}{2}(v_j - \bar{v}_j)$$

$$= \alpha w_{2j-1} - \beta w_{2j}$$

- $A w_{2j} = \dots = \beta w_{2j-1} + \alpha w_{2j}$

Consideriamo la mappa lineare T definita da $T e_j = w_j$ $(j = 1, \dots, 2n)$

Ricordiamo A è $2n \times 2n$, $\{e_j\}$ base di $\mathbb{R}^{2n}$

La matrice T associata ha colonne $w_1 \dots w_{2n}$. Abbiamo dimostrato che T è invertibile

Calcoliamo

- $(T^{-1} A T) e_{2j-1} = T^{-1} A w_{2j-1} =$

$$= T^{-1} (\alpha w_{2j-1} - \beta w_{2j})$$

$$= \alpha e_{2j-1} - \beta e_{2j}$$

- $(T^{-1} A T) e_{2j} = \dots = \beta e_{2j-1} + \alpha e_{2j}$

Vediamo che

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_n \end{pmatrix} \qquad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> Sia A matrice $n \times n$ con autovalori distinti. Allora

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_\ell \end{pmatrix} \qquad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

[il segno di β è convenzione]

<u>Commento</u>: adesso dobbiamo capire come risolvere

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

Definiamo $z = x + iy$

$$\frac{d}{dt}(x+iy) = (\alpha x + \beta y) + i(-\beta x + \alpha y) =$$

$$= (\alpha - i\beta)x + i(\alpha - i\beta)y$$

$$= (\alpha - i\beta)(x + iy)$$

$\longrightarrow \quad \dot{z} = \mu z \quad \Rightarrow \quad z(\tau) = k e^{\tau \mu}$

Quindi

$$\left(x(\tau) + i y(\tau)\right) = (k_1 + i k_2)\, e^{\tau\alpha} e^{-i\tau\beta}$$

$$= (k_1 + i k_2)\, e^{\tau\alpha} \left(\cos\beta\tau - i \sin\beta\tau\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(\tau) &= k_1 e^{\tau\alpha} \cos\beta\tau + k_2 e^{\tau\alpha} \sin\beta\tau \\ y(\tau) &= k_2 e^{\tau\alpha} \cos\beta\tau - k_1 e^{\tau\alpha} \sin\beta\tau \end{aligned}}$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} x_1' = -2x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad \dot{x} = Ax \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora : $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 2$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm i$$

$\lambda = i + 1$: autovettore

$$v = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1 = \mathrm{Re}\, v} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_2 = \mathrm{Im}\, v}$$

Costruiamo $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo a variabili $y = Tx = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_1 = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \sin t \\ y_2 = k_2 e^t \cos t - k_1 e^t \sin t \end{cases}$$

per finire $x = T^{-1} y = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$

<u>Caso generale</u> autovalori con molteplicità

$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow (z - \lambda)^k \, Pol(z) \rightarrow$

λ ha molteplicità algebrica k

Autospazio generalizzato

$$E_k = \ker\left[(A - \lambda_k I)^{m_k}\right]$$

è invariante $\left(v \in E_k \Rightarrow A(v) \in E_k \right)$

e $\dim E_k = m_k$

Autovettore generalizzato $(A - \lambda_k I)^{m_k} v = 0$

Si può dimostrare $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$

se $A : E \longrightarrow E$, , dico E_j = molteplicità algebrica di λ_j