Equazione della conservazione della quantità di moto in coordinate naturali - moti geostrofico - ciclostrofico e inerziale

Il sistema di coordinate (x, y, z) spesso usato per lo studio dei moti atmosferici alla scala sinottica e planetaria è funzionale ad evidenziare il bilancio geostrofico. Analogamente per i sistemi (x, y, p) e (x, y, θ).

Infatti, nell'equazione per la conservazione della quantità di moto, appaiono esplicitamente l'accelerazione di Coriolis assieme alle cause del moto, cioè il gradiente di pressione e l'accelerazione di gravità.

Va osservato che, in caso di moti su linee (traiettorie) curve, assume rilevanza anche l'accelerazione centrifuga, la quale è funzione della velocità e del raggio di curvatura della traiettoria.

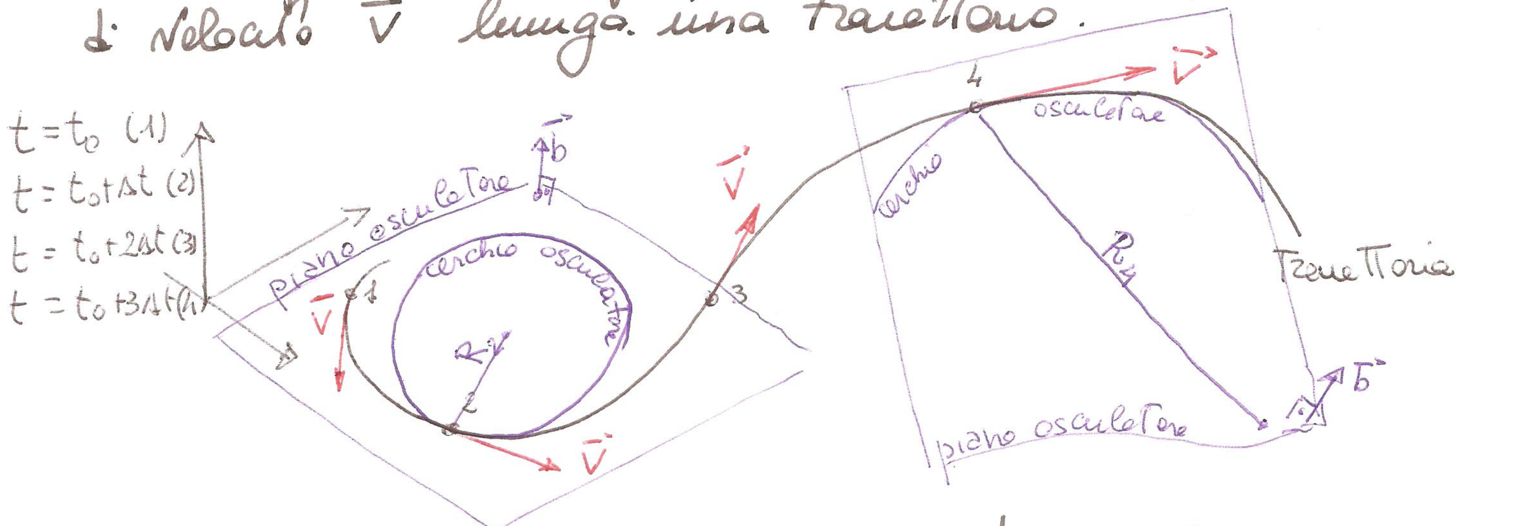
Nel caso in cui l'accelerazione centrifuga sia un elemento non trascurabile del moto del volume d'aria, allora è opportuno dotarsi di un sistema di riferimento in cui tale accelerazione compaia esplicitamente tra gli addendi dell'equazione per la conservazione della quantità di moto.

In particolare ciò è vero quando si intende costruire modelli di circolazione alle scale più piccole rispetto a quella sinottica, cioè alla mesoscala e alla microscala.

Una scelta particolarmente utile, per quanto riguarda i sistemi di riferimento, è quello delle coordinate naturali, in cui è la traiettoria, individuata dal vettore velocità, che è la caratteristica essenziale per lo studio del moto.
Il sistema di coordinate naturali trae ispirazione dalla geometria differenziale.

Definizione del sistema di coordinate naturali

Sia dato un volume d'aria, assimilabile geometricamente ad un punto nello spazio tridimensionale, che si muove di velocità $\vec{V}$ lungo una traiettoria.



Per definizione, il vettore $\vec{V}$ è sempre tangente alla traiettoria quindi si sceglie il versore tangente alla traiettoria come:

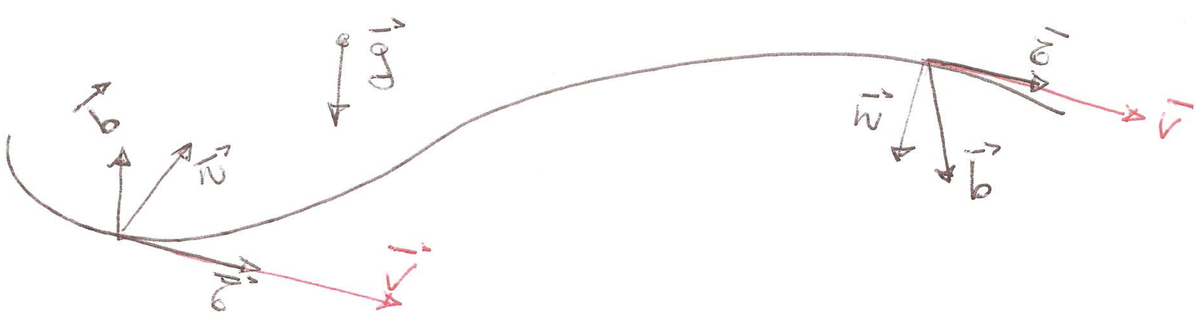
$\boxed{\bar{\tau} := \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}}$ inoltre si definisce il modulo della velocità:

$\boxed{v := |\vec{V}|}$ da cui $\boxed{\vec{V} = \vec{\tau} v}$

Si osservi che $\boxed{v \geq 0}$ $\forall t \in [t_{inizio}, t_{fine}]$ cioè è il versore $\bar{\tau}$ che individua sia la direzione che il verso del moto.

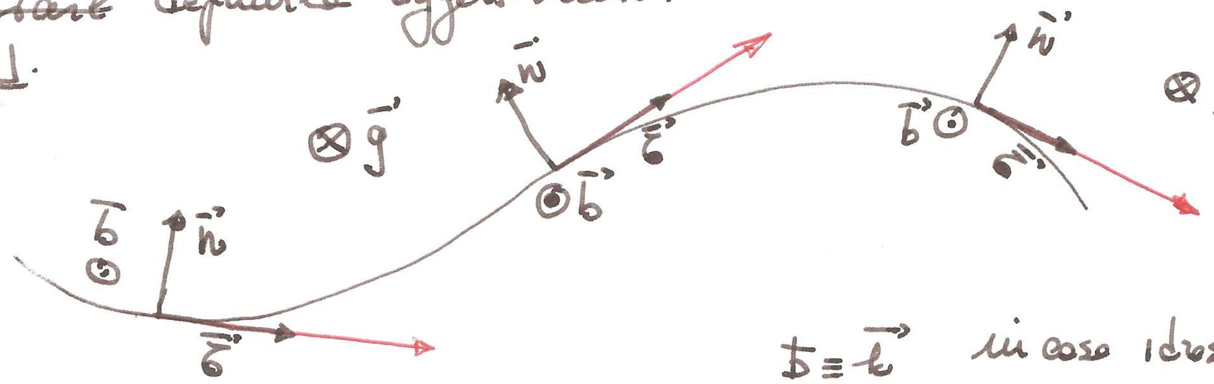
Dalla geometria, sappiamo che in ogni punto della traiettoria è possibile individuare un piano che contiene il cerchio osculatore la traiettoria in quel punto ed è dato il cerchio osculatore che approssima la curva in quel punto. Quindi è possibile utilizzare il versore che è contenuto nel raggio del cerchio osculatore per definire una coppia di versori che sono la base del piano osculatore $\bar{n}$. La geometria individua come verso del versore normale a $\bar{\tau}$ quello che lo orienta verso il centro del cerchio osculatore. Conseguentemente, tramite prodotto vettoriale dei due si ottiene il terzo versore che forma, insieme agli altri due, la base per lo spazio tridimensionale

Questa scelta crea dei problemi all'equazione per la conservazione della quantità di moto, infatti i moti atmosferici che si intende descrivere sono prevalentemente sviluppati in orizzontale con la gravità individuante una direzione e soprattutto un verso costante ed uniforme.



Utilizzando $\vec n$ nella definizione canonica si ha che il versore binormale $\boxed{\vec b = \vec t \times \vec n}$, a seconda della curvatura della traiettoria può essere orientato con verso concorde o discorde la gravità.
Quindi avremo un'equazione per la componente verticale della quantità di moto che ha segni, in uno dei suoi addendi, che cambiano nel corso del tempo, lungo la traiettoria.

Per evitare questo inconveniente, si preferisce fissare $\vec b$ in senso concorde con la direzione verticale ($-\vec g$) e notare che $\boxed{\vec n}$ è un versore che è sempre ortogonale a $\vec t$ ($\vec t \perp \vec n$) ma che, rispetto ad un osservatore che si muove con il punto (volume di fluido), cioè secondo l'approccio lagrangiano, si trova sempre alla "sinistra" dell'osservatore.
Osservare che il concetto di "sinistra" è una convenzione non supportata da alcun esperimento fisico che permetta di ~~orientarla~~ definirla oggettivamente.
Quindi:



$\vec b \equiv \vec k$ in caso idrostatico

Equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto in coordinate naturali - caso idrostatico

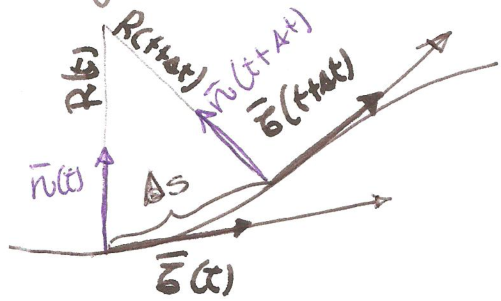
Ricordando la forma vettoriale della equazione per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \text{acc. Coriolis} + \text{gradiente } \begin{matrix}\text{geopotenziale} \\ \text{pressione}\end{matrix} + \vec{g}$$

Valutiamo $\frac{d\vec{v}}{dt}$ nel sistema di coordinate naturali

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}} = \frac{d}{dt}(\bar{\tau} v) = \boxed{\frac{d\bar{\tau}}{dt} v + \bar{\tau}\frac{dv}{dt}}$$

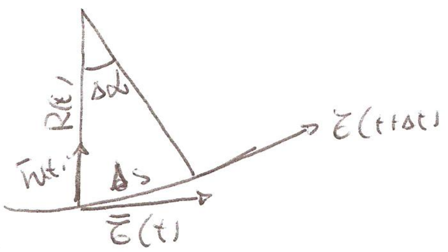
dove il primo addendo indica la variazione di direzione e verso del versore $\bar{\tau}$ lungo la traiettoria (nel tempo)



Calcoliamo $\boxed{\frac{d\bar{\tau}}{dt}}$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{\tau}(t+\Delta t) - \bar{\tau}(t)}{\Delta t}$$

Osserviamo che per $\Delta t \to 0$ $R(t+\Delta t) \to R(t)$ cioè il raggio del cerchio osculatore al tempo t e che la differenza $\bar{\tau}(t+\Delta t) - \bar{\tau}(t)$ si orienta come $\bar{n}(t)$



$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}$$

Quindi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{\tau}(t+\Delta t) - \bar{\tau}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\frac{1}{R}\vec{n} = \boxed{\frac{v}{R}\vec{n}}$$

<u>N.B.</u> Il fatto di aver imposto ad $\bar{n}$ un verso fisso, implica che R deve assumere un segno: positivo se il cerchio osculatore contiene $\vec{n}$; negativo se il cerchio osculatore non contiene $\vec{n}$

Quindi l'accelerazione in coordinate naturali diventa

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{v^2}{R}\bar{n} + \frac{dv}{dt}\bar{\tau}$$

osservare che compare il contributo dell'accelerazione centripeta

N.B. Non c'è componente lungo $\bar{k}$ in quanto il moto giace sempre sul piano osculatore

Le componenti scalari del gradiente di pressione, o del geopotenziale, sono facilmente individuabili

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{\tau})\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \quad \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right) & \bar{n})\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \quad \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \\ \bar{k})\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \quad \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) & \end{array}}$$

L'accelerazione di gravità, semplicemente ha una sola componente scalare $\boxed{\bar{g} = -g\,\bar{k}}$ con $g = 9.81\, m\, s^{-2}$

Determiniamo le componenti scalari dell'accelerazione di Coriolis ricordando che $\bar{k}$ è il versore verticale, ma che $\bar{\tau}$ ed $\bar{n}$ cambiano lungo la traiettoria, da punto a punto.

accelerazione di Coriolis $\rightarrow$ $-2\bar{\Omega}\times\bar{V}$ da cui

$$\boxed{-2\bar{\Omega}\times\bar{V} = -2\begin{vmatrix} \bar{\tau} & \bar{n} & \bar{k} \\ \Omega_\tau & \Omega_n & \Omega_k \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \bar{\tau}(\emptyset) + \\ + \bar{n}(-2\Omega_k v) + \\ + \bar{k}(2\Omega_n v) \end{array}}$$

Osserviamo che non esiste accelerazione di Coriolis lungo la traiettoria, ma essa agisce ortogonalmente al moto. Ciò è in accordo con il fatto che la forza ad essa associata non compie mai lavoro.

Sono ora da determinare le forme funzionali di Ω_k e Ω_n. Per la prima è facile notare che si tratta di

$$\boxed{\Omega_k = \Omega \sin\varphi}$$ con φ la latitudine

quindi indipendente dalla traiettoria, dipende solo da φ

Mentre per lo scalare Ω_n non è nota se non ci sono informazioni complete sulla traiettoria. Lasciandolo indicato.

Utilizzando la definizione del parametro di Coriolis

$$\boxed{f := 2\Omega \sin\varphi}$$

si ha

$$\boxed{-2\bar{\Omega}\times\bar{v} = \bar{\sigma}\cdot 0 - \bar{n} f v + \bar{k}\,\Omega_n v}$$

Quindi le tre equazioni scalari per la conservazione della quantità di moto in coordinate naturali sono:

$$\bar{\sigma})\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \qquad\qquad \bar{\sigma})\quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$\bar{n})\quad \frac{v^2}{R} = -fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \qquad\qquad \bar{n})\quad \frac{v^2}{R} = -fv - \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$\bar{k})\quad 0 = \Omega_n v - g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad\qquad \bar{k})\quad \frac{\partial \phi}{\partial p} = (\Omega_n v - g)^{-1}\frac{g}{\rho}$$

in coordinate z — in coordinate isobariche

Osservazione

Nel caso idrostatico le equazioni per la componente $\bar{k}$ si riducono alle usuali relazioni tra gradiente di pressione verticale densità e gravità, oppure gradiente del geopotenziale rispetto a p e densità.

Osservazione

Il modulo della velocità può cambiare solo c'è una componente del gradiente di pressione (geopotenziale) lungo la traiettoria

Osservazione

La componente $\bar{\sigma}$) dell'equazione è prognostica mentre le altre due sono diagnostiche.

Osservazione

Lo studio della componente $\bar{n}$) permette di confrontare addendi appartenenti a cause (aspetti) del moto.