Funzioni di n variabili a valori scalari

Ultimo aggiornamento: 16 maggio 2019

Cominciamo a studiare le funzioni di più variabili. Nella maggior parte dei casi studieremo funzioni a valori scalari, ma alcune cose le vedremo per funzioni a valori vettoriali.
Un utile esercizio è cercare di abituarsi ad immaginare grafici di funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$. A titolo di esempio proviamo con la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Per cercare di capire come è fatto un grafico può essere utile restringere la funzione a rette. Cominciamo considerando rette parallele agli assi: se consideriamo per esempio la retta $(x, 0)$ la funzione ristretta a tale retta è

$$f(x,0) = x^2 \,.$$

Se consideriamo la retta $(x, 1)$ la funzione ristretta a tale retta è $f(x,1) = x^2 + 1$. Se fissiamo $\bar{y}$ e restringiamo f alla retta $(x, \bar{y})$ abbiamo la parabola (si veda la Figura 1.a per alcuni esempi)

$$f(x,\bar{y}) = x^2 + \bar{y}^2 \,.$$

Analogamente si ottengono parabole fissando $\bar{x}$ e considerando $f(\bar{x}, y) = \bar{x}^2 + y^2$ oppure fissando rette per l'origine. Per considerare tutte le rette per l'origine, compresi gli assi cartesiani che abbiamo già considerato, è sufficiente fissare un vettore $v = (v_1, v_2)$ che per semplicità considereremo di norma 1, cioè soddisfacente $v_1^2 + v_2^2 = 1$, e considerare la curva $r(t) := tv$ con $t \in \mathbf{R}$.
In questo caso si ottiene $f \circ r(t) = f(r(t)) = f(tv_1, tv_2) = t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2 = t^2$. Si osservi che $f(r(t)) = t^2$ per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^2$ di norma 1. Questo significa che considerando la restrizione di f ad una qualunque retta per l'origine il grafico è sempre lo stessa parabola. Questa serie di informazioni può farci intuire che il grafico è quello indicato in Figura 1.c o in Figura 1.d. La differenza tra i due è che in Figura 1.c il dominio è un quadrato, in Figura 1.d il dominio è un cerchio. Si osservi come il grafico in Figura 1.d può essere ottenuto ruotando una qualunque delle parabole in Figura 1.b.

Si noti che questo procedimento equivale a sezionare il grafico di f

con i piani verticali $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y = \bar{y}\}$, che brevemente scriveremo $y = \bar{y}$, nel primo caso (o analogamente con i piani $x = \bar{x}$); con i piani verticali $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x = tv_1\,, y = tv_2\, t \in \mathbf{R}\}$ dove v è un vettore di norma 1.
Il procedimento di sezionare il grafico, abbinato alla ricerca degli insiemi di livello, non è una tecnica generale, ma può essere qualche volta utile ad avere informazioni, anche se parziali, sul grafico della funzione che si sta considerando.

Figura 1.a

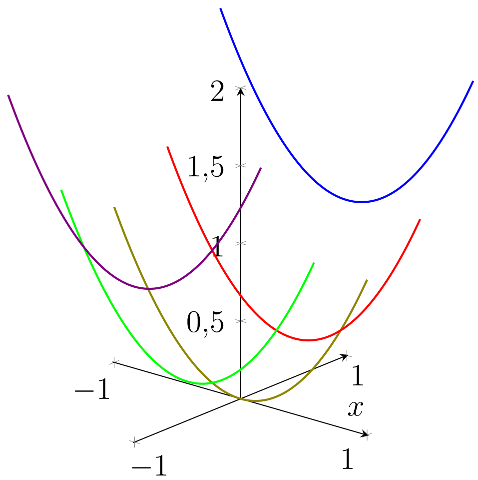


Figura 1.b

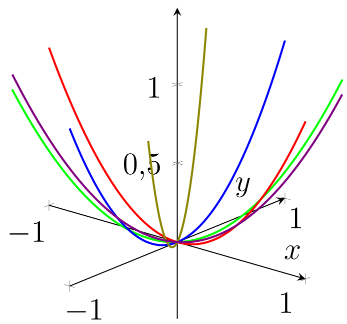


Figura 1.c

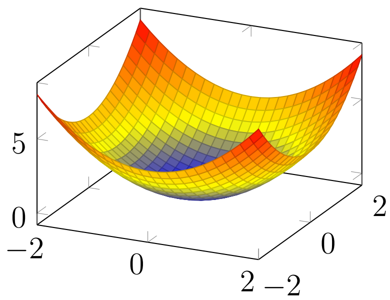
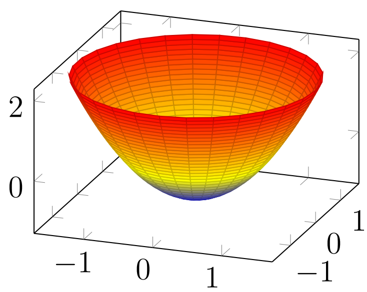


Figura 1.d



Il caso più semplice è quello in cui una funzione f di due variabili x, y è il prodotto di due funzioni g, h di una variabile definita come segue

$$f(x,y) = g(x)h(y)\,.$$

In tal caso, fissando prima una variabile e poi l'altra è ancora più semplice immaginare il grafico. Ad esempio, immaginare il grafico della funzione (il cui grafico è parzialmente mostrato in Figura 1.e limitatamente al rettangolo $x \in [-1, 3]$ e $y \in [0, \pi]$)

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$$

è relativamente semplice. Fissando prima un valore per y, sia $\bar{y}$, ci si rende conto che sopra la retta $y = \bar{y}$ la restrizione del grafico di f è un'esponenziale moltiplicata per il fattore $\operatorname{sen} \bar{y}$. In particolare per $y = 0$ e $y = \pi$ tale restrizione è nulla.
Viceversa, fissando $x = \bar{x}$, si ha che la restrizione del grafico di f alla retta $x = \bar{x}$ è il grafico della funzione seno moltiplicata per $e^{\bar{x}}$.

Figura 1.e

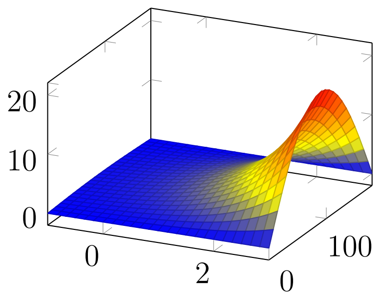
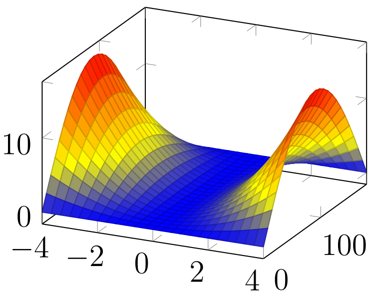


Figura 1.f



Analogamente si può fare per la funzione $g(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$, il cui grafico, limitatamente al rettangolo $[-4, 4] \times [0, \pi]$, è mostrato in Figura 1.f.

Altro esempio molto semplice, ma allo stesso tempo non banale, è il seguente: si consideri la funzione

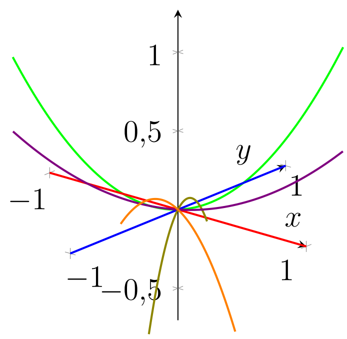
$$f(x, y) = xy\,.$$

Anche questa funzione, come il primo esempio visto, è un polinomio di secondo grado. Se si considerano le restrizioni di tale funzione alle rette per l'origine del tipo

$$y = kx \quad \text{oppure} \quad x = ky \qquad \text{con} \qquad k \neq 0$$

ci si accorge subito che tali grafici sono parabole, che degenerano ad una retta nel caso in cui $k = 0$, come evidenziato nella figura che segue

Figura 1.g



1. Insiemi di livello

Data una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ ed una costante $c \in \mathbf{R}$ ci si può chiedere qual è l'insieme

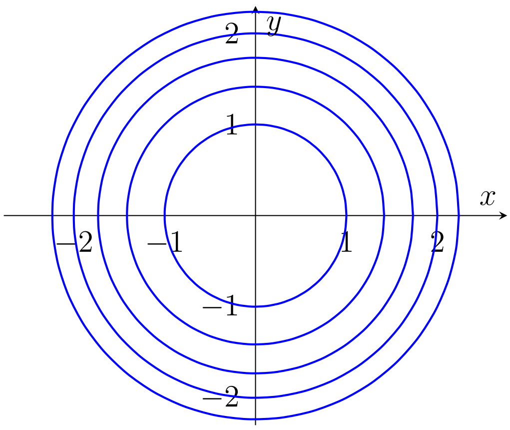
$$\Gamma_c = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) = c\right\}.$$

Procediamo sempre con l'esempio di $f(x, y) = x^2 + y^2$ definita in $\mathbf{R}^2$ e chiediamoci quali sono gli insiemi di livello. Si osserva subito che

$$\Gamma_c = \begin{cases} \emptyset & \text{se } c < 0\,, \\ \{(0,0)\} & \text{se } c = 0\,, \\ \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\} & \text{se } c > 0\,, \end{cases}$$

cioè, se $c > 0$, è una circonferenza di raggio $\sqrt{c}$, se $c = 0$ abbiamo un solo punto, se $c < 0$ abbiamo l'insieme vuoto.

Figura 2



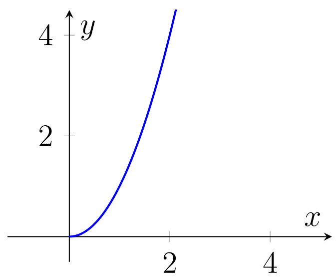
In Figura 2 sono riportati gli insiemi di livello corrispondenti alle costanti $1, 2, 3, 4, 5$. Si noti come dall'origine, l'insieme Γ_0 di livello 0, alla prima curva, l'insieme Γ_1 di livello 1, ci sia molto più spazio che tra Γ_1 e Γ_2, e così via. Questi curve ci forniscono una doppia informazione: che la forma dell'insieme sul quale la funzione assume uno stesso valore è una circonferenza e che all'aumentare della costante c che indica il livello la funzione cresce sempre più velocemente poiché gli insiemi invece si allontanano tra loro sempre più lentamente. Se idealmente ci muovessimo lungo una semiretta uscente dall'origine per salire dal livello c al livello $c + 1$ dovrei percorrere un segmento lungo $\sqrt{c+1} - \sqrt{c} = \dfrac{1}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c}}$, che evidentemente decresce all'aumentare di c.
Spesso per funzioni da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ si parla di *curve di livello*, anche se gli insiemi non sono sempre delle curve.

La funzione appena vista è detta *radiale*. Una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è detta radiale se esiste una funzione $\tilde{f} : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ tale che

$$f(x_1, \dots x_n) = \tilde{f}(|x|)\,,$$

cioè il valore della funzione f nel generico punto $(x_1, \dots x_n)$ dipende di fatto solo dalla distanza dall'origine di tale punto. La funzione $\tilde{f}$ nel caso di $f(x, y) = x^2 + y^2$ è semplicemente $\tilde{f}(\rho) = \rho^2$ definita per $\rho \geqslant 0$ e rappresentata in figura

Figura 3



Come conseguenza si ha il fatto che, se il dominio di f è $\mathbf{R}^2$, gli insiemi di livello possono essere solo dei seguenti tipi: l'insieme vuoto, un punto, una circonferenza, una corona circolare, oppure unione di questi (ad esempio più circonferenze). Per cui se le curve di livello di una funzione da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}$ sono circonferenze la funzione in questione sarà radiale.
In generale, se $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, gli insiemi di livello potranno essere sempre l'insieme vuoto o un punto, ma anziché circonferenze si avranno sfere se $n = 3$, ipersfere in dimensione più alta (cioè insiemi che soddisfano $|x|$ costante con $x \in \mathbf{R}^n$).

2. Continuità

Cominciamo con il dare la definizione di funzione continua.

Definizione 2.1 (continuità)**.** *Una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, è continua nel punto $x_o \in A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\|x - x_o\| < \delta\,,\ x \in A\,, \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_o)\| < \varepsilon;$$

equivalentemente se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap B_\delta(x_o) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_\varepsilon(f(x_o))\,;$$

equivalentemente se $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ x \in A}} f(x) = f(x_o)$*.*

Si considerino ora una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ e una curva continua $\gamma : [a, b] \to A$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, in modo tale che il punto x_o appartenga al sostegno della curva. Per semplicità (a meno di riparametrizzazioni è sempre vero) supponiamo che γ sia definita in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ per qualche $\varepsilon > 0$ e che $\gamma(0) = x_o$. Se f è una funzione continua in $x_o \in A$ si ha che per ogni $\delta_2 > 0$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$x \in A \cap B_{\delta_1}(x_o) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_{\delta_2}(f(x_o))\,.$$

Se ora ci limitiamo a considerare alcuni valori per x, quelli che stanno sul sostegno della curva che indicheremo con Γ, chiaramente si avrà che

$$x \in A \cap B_{\delta_1}(x_o) \cap \Gamma \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B_{\delta_2}(f(x_o))\,.$$

Questo significa in particolare che la funzione $f \circ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbf{R}$ è continua. Possiamo facilmente concludere quindi che

$$f \text{ continua in } x_o \in A \quad \Longrightarrow \quad f \circ \gamma \ \text{ continua in } 0$$

per ogni curva continua $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to A$ con $\gamma(0) = x_o$ (si veda anche la Figura 2).

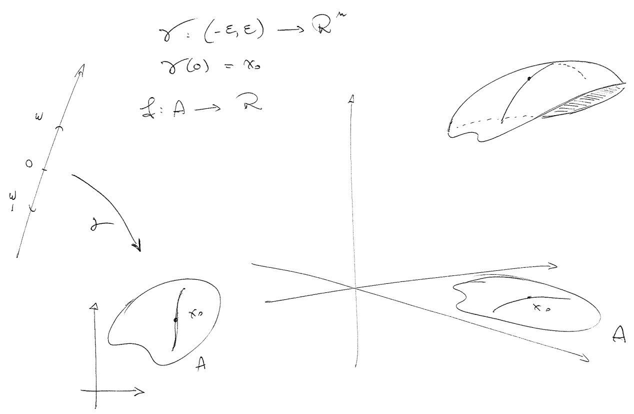


Figura 4

Ricordo - Dati due numeri $a, b \in \mathbf{R}$ vale la disuguaglianza $2ab \leqslant a^2+b^2$ e si ha $2ab = a^2 + b^2$ solo se $a = b$. (Dimostrazione: $(a-b)^2 \geqslant 0$.)

Esempio 2.2. - Vediamo ora un esempio che farà capire che la continuità in 0 di $f \circ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbf{R}$ per qualche curva γ o anche per una ampia classe di curve γ tali che $\gamma(0) = x_o$ non garantisce la continuità in x_o per f.

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ovviamente la funzione è continua in tutti punti diversi da $(0,0)$. Cerchiamo di capire se lo è anche in $(0,0)$. Consideriamo tutte le rette per l'origine e restringiamo f a tali rette. Per fare ciò si fissi un vettore $v = (v_1, v_2)$ di norma 1 e si consideri la retta $t \mapsto tv$ con $t \in \mathbf{R}$. Studiamo la funzione ristretta a tali rette con $t \neq 0$:

$$f(tv_1, tv_2) = \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} .$$

Se $v_1 = 0$ oppure $v_2 = 0$ la funzione è identicamente nulla; diversamente studiando il limite

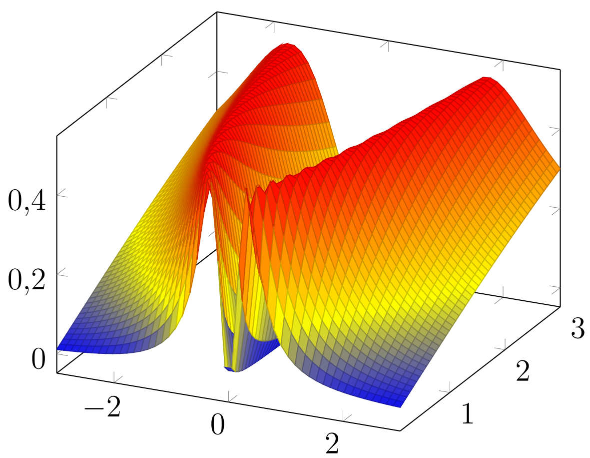
$$\lim_{t\to 0} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = 0$$

si ottiene nuovamente zero. Si conclude che la restrizione di f lungo tutte le rette per l'origine ha limite 0 nel punto $(0,0)$, valore che coincide con il valore di f nell'origine. Quindi le restrizioni lungo tutte le rette per l'origine sono continue.
Può bastare a dire che f è continua in $(0,0)$?
Si consideri la curva $y = x^2$ e si restringa la f a tale curva, per esempio parametrizzandola con $t \mapsto (t, t^2)$. Si ottiene

$$f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4 + t^4} \qquad \text{per cui} \qquad \lim_{t\to 0} f(t, t^2) = \frac{1}{2} .$$

Di conseguenza concludiamo che f non è continua in $(0,0)$. Si veda la Figura 3 nella quale è rappresentato il grafico di f con $y > 1/10$.

Figura 3



EX - Si osservi che seguendo l'esempio precedente è facile produrre funzioni le cui restrizioni lungo le rette e le parabole per l'origine sono continue e non lo sono lungo le cubiche. Basta considerare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificarlo! Si scriva un esempio di funzione la cui restrizione lungo tutte le curve del tipo (at, bt^k) e (at^k, bt) risulta continua nell'origine per $k = 1, 2, \dots n-1$ ($a, b \in \mathbf{R}$), ma invece non lo è lungo le curve (t, t^n).

EX - Si verifichi che la seguente funzione definite in $\mathbf{R}^2$ e a valori reali non è continua in $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dati $f : A \to \mathbf{R}$, $x_o \in A$, $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to A$ ($\varepsilon > 0$) con $\gamma(0) = x_o$ diremo *restrizione di f* a γ e la denoteremo con $f|_\gamma$ la funzione $f \circ \gamma$. Dato $x_o \in A$, per semplicità diremo che la restrizione $f|_\gamma$ è continua in x_o anziché dire che $f \circ \gamma$ è continua in 0.

Esempio 2.3. - Un esempio molto più semplice rispetto a **??**, ma analogo, che mostra che lungo tutte le rette per un punto le restrizioni di una certa funzione sono continue nonostante la funzione non sia continua è il seguente.
Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in A\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 < y < 2x^2\}$.

Figura 4.a

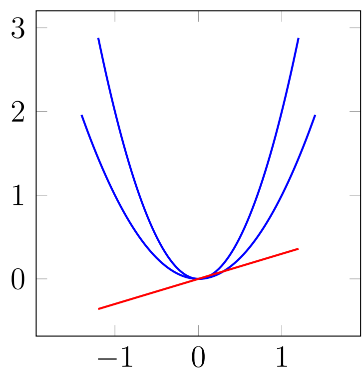
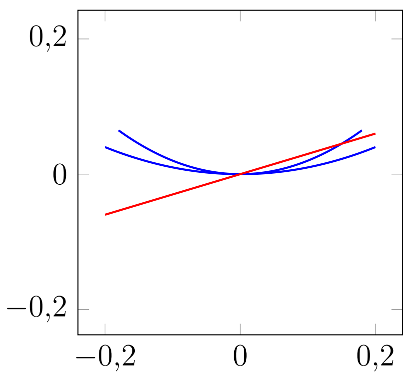


Figura 4.b



Chiaramente f non è continua nell'origine, dove f assume il valore 0, perché in qualunque intorno $B_\delta((0,0))$ dell'origine f assume sia il valore 0 che il valore 1. Valutando però il limite in $(0,0)$ della restrizione di f lungo una qualunque retta per l'origine ($\lim_{t\to 0} f(tv_1, tv_2)$ con $|(v_1, v_2)| = 1$) si ha che tale limite è zero. Infatti se si considera la retta tv con $v = (1,0)$ si ha che la restrizione di f a tale retta è identicamente nulla; per ogni altro vettore v si ha che, definitivamente per $t \to 0$, la funzione assume il valore zero (verificarlo! fare l'esercizio che segue). A tal proposito si veda la Figura 4. Nella seconda, la 4.b, c'è un ingrandimento vicino all'origine della Figura 4.a, che evidenzia (ma non dimostra) come la retta (disegnata in rosso) sufficientemente vicino all'origine passi solamente nella zona in cui f assume identicamente il valore zero.

EX - Date le due funzioni $r(x) = mx$ e $p(x) = ax^2$ ($m \neq 0$ e $a > 0$) mostrare che esiste un intorno I dello 0 tale che per ogni $x \in I \setminus \{0\}$ si ha che $r(x) < 0$ oppure $r(x) > p(x)$.

Valgono però i seguenti risultati, le cui dimostrazioni sono molto simili tra loro.

Teorema 2.4. *Siano $f : A \to \mathbf{R}$ con A aperto di $\mathbf{R}^N$ e $x_o \in A$. Allora f è continua in x_o se e solo se per ogni successione $(x_n)_n \subset A$ convergente ad x_o si ha che*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_o).$$

Dimostrazione - È immediato vedere che se f è continua in x_o allora per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente ad x_o si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_o).$$

Vediamo l'implicazione inversa. Se, per assurdo, non fosse vera si avrebbe l'esistenza di $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ esisterebbe

$$x_n \in B_{1/n}(x_o) \qquad \text{tale che} \qquad |f(x_n) - f(x_o)| \geqslant \varepsilon.$$

Ma ciò contraddirebbe l'ipotesi. $\square$

Il Teorema **??** precedente può essere enunciato in maniera analoga per i limiti, visto che la continuità di f in x_o è equivalente a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in A}} f(x) = f(x_o)$.

Di conseguenza si avrà, per f definita in A, che $(l \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$

$$\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in A}} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} f\big(x_n\big) = l$$

per **ogni** successione $(x_n)_n \subset A$ convergente ad x_o.

Osservazione 2.5. - È chiaramente impossibile usare questa equivalenza per provare che un certo limite è l, ma è molto utile usata in negativo, come vedremo con qualche esercizio: se si trovano due successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ con $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$ allora non esiste $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$. Si può concludere la stessa cosa se si trovano due curve γ_1 e γ_2 tali che $\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t))$ e $\lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t))$ sono diversi.

Enunciamo ora un risultato, senza mostrarlo, già visto per funzioni di una variabile e che vale anche per funzioni di più variabili.

Teorema 2.6 (permanenza del segno)**.** *Siano $f : A \to \mathbf{R}$ con A aperto di $\mathbf{R}^N$ e x_o di accumulazione per A. Se $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \in A}} f(x) = l \neq 0$ allora esiste un intorno di x_o $B_r(x_o)$ tale che $f(x)$ assume lo stesso segno di l per ogni $x \in \big(B_r(x_o) \setminus \{x_o\}\big) \cap A$.*

Concludiamo con il seguente risultato, già visto per funzioni di una variabile e la cui dimostrazione è uguale al caso di funzioni di una variabile.

Teorema 2.7 (Weierstrass)**.** *Se $f : K \to$ è una funzione continua su K, K insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, allora f ammette massimo e minimo su K.*

Dimostrazione - Definiamo $\mu := \inf_K f$. Tale quantità potrà essere finita o infinita ($-\infty$ per la precisione). L'obiettivo è mostrare che $\mu \neq -\infty$ e che esiste un qualche punto $\bar{x} \in K$ nel quale f assume il valore μ: allora avremo mostrato che f assume il suo valore minimo in

$\bar{x} \in K$. Analogamente si farà per il valore massimo.
Se K è compatto, come abbiamo già visto, è compatto per successioni (analogamente al caso unidimensionale).
Si consideri ora una successione $\{x_n\}_n \subset K$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \mu.$$

Dalla compattezza di K possiamo trovare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ convergente ad un certo $\bar{x} \in K$. Si noti che ovviamente $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \mu$. Usando la continuità di f possiamo concludere

$$\mu = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}). \qquad \square$$

In generale, se f è una funzione definita in A sottoinsieme generico di $\mathbf{R}^n$, l'insieme immagine $f(A)$ ammette sempre estremo superiore ed estremo inferiore, denotati al solito con $\sup_A f$ e $\inf_A f$. Può capitare che $\sup_A f$ non appartenga a $f(A)$, cioè che non esista alcun elemento di A la cui immagine tramite f sia l'estremo superiore di $f(A)$. Quando invece $\sup_A f$ appartiene a $f(A)$ esiste (almeno) un punto $\bar{x} \in A$ tale che

$$\sup_A f = f(\bar{x}) \,.$$

Tale punto è detto **punto di massimo**, f ammette massimo che si denota con $\max_A f$ e vale $\sup_A f = \max_A f$ e inoltre ovviamente

$$f(x) \leqslant f(\bar{x}) \qquad \text{per ogni } x \in A\,.$$

Si dice che un **punto** $\bar{x}$ è **di massimo stretto** se vale la disuguaglianza

$$f(x) < f(\bar{x}) \qquad \text{per ogni } x \in A,\ x \neq \bar{x}\,.$$

Analoghe considerazioni si fanno per estremo inferiore e minimo.
Il teorema di Weiestrass ci assicura, sotto opportune ipotesi, l'esistenza dei valori minimo e massimo per f e di almeno un punto di minimo e di almeno un punto di massimo.
Un punto $\bar{x} \in A$ sarà detto invece di **massimo locale** per f se esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x}$ risulta di massimo per f ristretta all'insieme $A \cap B_\delta(\bar{x})$, cioè

$$f(x) \leqslant f(\bar{x}) \qquad \text{per ogni } x \in A \cap B_\delta(\bar{x})$$

e di **massimo locale stretto** se esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x}$ risulta di massimo stretto per f ristretta all'insieme $A \cap B_\delta(\bar{x})$, cioè

$$f(x) < f(\bar{x}) \qquad \text{per ogni } x \in A \cap B_\delta(\bar{x}),\ x \neq \bar{x}\,.$$

Analogamente un punto sarà di minimo locale se esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x}$ risulta di minimo per f ristretta all'insieme $A \cap B_\delta(\bar{x})$.

Esempio - Si consideri $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x + 1$. Tale funzione, se pur continua, non ammette né massimo, né minimo e si ha $\sup_{(0,1)} f = 2$ e $\inf_{(0,1)} f = 1$. Considerando $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ definita da $g(x) = x + 1$ si ha invece che g ammette sia massimo che minimo e $\max_{[0,1]} g = 2$ e 1 è punto di massimo, $\min_{[0,1]} g = 1$ e 0 è punto di minimo.

3. Derivate parziali e derivabilità

Sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione di n variabili, A aperto di $\mathbf{R}^n$ e $\bar{x} \in A$. Se fissiamo $n-1$ componenti di $\bar{x}$ e consideriamo la funzione di una variabile

$$f_i(y) := f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, y, \bar{x}_{i+1}, \ldots \bar{x}_n)$$

possiamo considerare la sua derivata nel punto $\bar{x}_i$

$$\frac{df_i}{dy}(\bar{x}_i) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(\bar{x}_i + t) - f_i(\bar{x}_i)}{t}$$

ammesso che tale limite esista e sia finito, dove

$$\frac{f_i(\bar{x}_i + t) - f_i(\bar{x}_i)}{t} =$$

(1)

$$= \frac{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + t, \bar{x}_{i+1}, \ldots \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots \bar{x}_n)}{t}.$$

Questo corrisponde a restringere f alla retta

$$(\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)$$

e a fare la derivata ordinaria della funzione di una variabile così ottenuta. Se, per esempio, ci limitiamo a $n = 2$ e se denotiamo con $(\bar{x}, \bar{y})$ il punto nel quale si vogliono definire le derivate si avrebbero le due funzioni, che chiamiamo g_1 e g_2,

$$g_1(x) = f(x, \bar{y}), \qquad g_2(y) = f(\bar{x}, y).$$

La procedura definita sopra si riduce in questo caso a calcolare le due derivate, se esistono,

$$\frac{dg_1}{dx}(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \frac{dg_2}{dy}(\bar{y}),$$

cioè rispettivamente i due limiti, se esistono finiti,

$$\lim_{t\to 0}\frac{g_1(\bar{x}+t)-g_1(\bar{x})}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+t,\bar{y})-f(\bar{x},\bar{y})}{t}\,,$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{g_2(\bar{y}+t)-g_2(\bar{y})}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x},\bar{y}+t)-f(\bar{x},\bar{y})}{t}\,.$$

I rapporti incrementali appena scritti possono equivalentemente essere riscritti come segue

$$\frac{f(\bar{x}+t,\bar{y})-f(\bar{x},\bar{y})}{t}=\frac{f\big((\bar{x},\bar{y})+t(1,0)\big)-f(\bar{x},\bar{y})}{t}\,,$$
$$\frac{f(\bar{x},\bar{y}+t)-f(\bar{x},\bar{y})}{t}=\frac{f\big((\bar{x},\bar{y})+t(0,1)\big)-f(\bar{x},\bar{y})}{t}\,,$$

e in generale in (**??**)

$$\frac{f(\bar{x}+t\,e_i)-f(\bar{x})}{t}\,.$$

Allo stesso modo è possibile considerare un generico vettore v di modulo 1 e considerare la funzione f ristretta alla retta $t\mapsto \bar{x}+tv$ e valutarne, se possibile, il limite dei rapporti incrementali

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+t\,v)-f(\bar{x})}{t}\,.$$

Se tale limite esiste, finito, lo chiameremo derivata direzionale di f nella direzione v nel punto $\bar{x}$ e lo denoteremo con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})\,.$$

Le derivate lungo i particolari vettori e_i si denotano semplicemente con $D_i f(\bar{x})$, con $f_{x_i}(\bar{x})$ o più spesso con

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

e sono dette *derivate parziali* di f nel punto $\bar{x}$.

Esempio 3.1. - Calcoliamo le derivate parziali della funzione $g(x,y)=x^2\operatorname{sen} y$. Se vogliamo calcolare la derivata rispetto alla variabile x, poiché ciò equivale a fissare un valore di y e muoversi lungo una retta parallela all'asse x (e analogamente per la derivata rispetto alla variabile y), si avrà semplicemente

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2\,x\operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x^2\cos y\,.$$