Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Elisabetta Colombo

Corso di Approfondimenti di Matematica per Biotecnologie, Anno Accademico 2010-2011,
http://users.mat.unimi.it/users/colombo/programmaBIO.html

Vettori

Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$

Ricordiamo il **Prodotto scalare di due vettori** in $\mathbf{R}^n$
Dati $\mathbf{a} = (a_1, ...a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, ...b_n)$ in $\mathbf{R}^n$ il prodotto scalare è il numero reale ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe, ossia

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i).$$

In particolare in $\mathbb{R}^2$ $(a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$
e in $\mathbb{R}^3$ $(a_1, a_2, a_3) \bullet (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Vogliamo definire ora un prodotto scalare sullo spazio vettoriale dei vettori del piano e dello spazio tridimensionale che sui vettori dati per componenti si riconduca alla definizione precedente.

Caso piano

Pensiamo ai vettori come frecce uscenti dal punto O; per semplicità cominciamo a prendere in esame solo i vettori che giacciono in uno stesso piano passante per O.

Nel piano possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O (Monometrico significa che si sceglie la stessa unità di misura su entrambi gli assi. Noi useremo solo sistemi ortogonali monometrici e quindi ci limiteremo a scrivere "sistema di riferimento cartesiano", sottointendendo tutto il resto).

Caso piano

Ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1, a_2); quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla coppia ordinata (a_1, a_2).

Scriviamo allora $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e chiamiamo i numeri reali a_1 e a_2 **componenti scalari del vettore** più precisamente

- a_1 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse x
- a_2 è la componente scalare di $\mathbf{v}$ secondo la direzione dell'asse y.

Definizione Quando si assegna il vettore $\mathbf{v}$ del piano tramite la coppia ordinata (a_1, a_2) si dice che **il vettore è rappresentato per componenti**

Caso piano

A questo punto si possono tradurre analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s date in precedenza.

Proposizione

Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ s\mathbf{v} &= (sa_1, sa_2). \end{aligned}$$

Se $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$, il suo **modulo** si calcola utilizzando il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}.$$

Versori canonici

I due vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ hanno entrambi modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei due assi x e y: per questo verranno detti **versori fondamentali o canonici**. Come in Fisica porremo

$$\mathbf{i} = (1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{j} = (0, 1).$$

Quindi ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2)$ del piano (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

Caso tridimensionale

Nello spazio tridimensionale possiamo introdurre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O con orientamento destrorso (cioè i tre assi cartesiani ortogonali x, y, z sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra.).

Ogni vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$ è individuato dal suo punto di arrivo A, che nel sistema di riferimento ha certe coordinate: (a_1, a_2, a_3): quindi, nel sistema di riferimento scelto, anche il vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla terna ordinata (a_1, a_2, a_3).

Scriviamo allora $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ e diciamo che il vettore **v è rappresentato per componenti**, poiché (anche nel caso spaziale) chiamiamo i numeri reali a_1, a_2 e a_3 **componenti scalari del vettore**:

Caso tridimensionale

più precisamente

• a_1 è la componente scalare di **v** secondo la direzione dell'asse x

• a_2 è la componente scalare di **v** secondo la direzione dell'asse y

• a_3 è la componente scalare di **v** secondo la direzione dell'asse z.

Caso tridimensionale

Traducendo analiticamente le definizioni di somma di vettori e di prodotto di un vettore per uno scalare s si ha la

Proposizione

Se $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ s\mathbf{v} &= (sa_1, sa_2, sa_3). \end{aligned}$$

Se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, il suo modulo si calcola utilizzando (due volte) il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

Caso tridimensionale

I tre vettori

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

hanno modulo 1 e hanno la direzione e il verso dei tre assi x, y e z: per questo verranno detti **versori fondamentali o canonici.**

Ogni vettore $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$ dello spazio (con sistema di riferimento cartesiano ortogonale) può anche essere scritto così

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Prodotto scalare di due vettori

Torniamo a considerare vettori del piano o dello spazio ordinario. Due vettori **v** e **w**, pensati come segmenti orientati applicati in uno stesso punto, individuano due angoli, uno convesso (cioè <u>non</u> più ampio di un angolo piatto) ed uno concavo: ma quando ci si riferisce all'angolo compreso tra i due vettori si intende parlare dell'<u>angolo convesso</u>. Inoltre non si distingue tra l'angolo compreso tra **v** e **w** e quello compreso tra **w** e **v** : si dirà perciò che tale angolo è <u>non orientato</u>. Denotiamo con θ la sua misura: se la misura è in radianti, risulta $\theta \in [0, \pi]$ mentre, se la misura è in gradi, θ può variare tra 0 e 180

Prodotto scalare di due vettori

Definizione Dati due vettori **v** e **w**, chiamiamo **prodotto scalare** (o prodotto interno) dei due vettori il numero reale $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta$. Scriveremo

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta.$$

Prodotto scalare di due vettori

Scriveremo

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta.$$

Proprietà del prodotto scalare

- commutativa: per ogni coppia di vettori **v** e **w** si ha $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = \mathbf{w} \bullet \mathbf{v}$;
- distributiva: per ogni terna di vettori **u**, **v** e **w** si ha $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$;
- di omogeneità: per ogni coppia di vettori **v** e **w** e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(s\mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{v} \bullet (s\mathbf{w}) = s(\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}).$$

Proprietà del prodotto scalare

Inoltre è chiaro che

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{v}| \cos 0 = |\mathbf{v}|^2$$

e che $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0$ se e solo se uno dei tre fattori è nullo, cioè

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = 0 \iff$
$|\mathbf{v}| = 0$ oppure $|\mathbf{w}| = 0$ oppure $\cos\theta = 0 \iff$
$\iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ oppure $\theta = \pi/2$

Dunque

Proprietà del prodotto scalare

Proposizione

Il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.

In particolare sono a due a due ortogonali i versori fondamentali e quindi

$$\boxed{\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = 0, \qquad \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0.}$$

Per calcolare il <u>prodotto scalare attraverso le componenti scalari</u> dei vettori osserviamo che, se

$\mathbf{v} = (a_1, a_2) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$,

Proprietà del prodotto scalare

applicando la proprietà distributiva e quella di omogeneità si trova

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \bullet (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) =$$
$$a_1 b_1 \mathbf{i} \bullet \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \bullet \mathbf{j} + a_2 b_1 \mathbf{j} \bullet \mathbf{i} + a_2 b_2 \mathbf{j} \bullet \mathbf{j}$$

e, tenendo conto che i due versori fondamentali sono ortogonali e che $\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$ e $\mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, si ricava

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Analogamente se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si trova

$$\boxed{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.}$$

Proprietà del prodotto scalare

Osservazione Siano **v** e **w** due vettori sono rappresentati per componenti. Allora il prodotto scalare può essere utilizzato per:

1) individuare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra i due.

Ad esempio, se $\mathbf{v} = (4, -3)$ e $\mathbf{w} = (5, 12)$, si ha

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 12 = -16$$

Proprietà del prodotto scalare

e d'altro lato, usando la definizione,

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cos\theta = \sqrt{4^2+3^2} \cdot \sqrt{5^2+12^2} \cos\theta = 5 \cdot 13 \cos\theta$$

e, uguagliando, $\cos\theta = -\dfrac{16}{65}$, cioè

$\theta = \arccos\left(-\dfrac{16}{65}\right) \simeq 1.819$ radianti.

In generale, per risolvere il problema di trovare l'angolo (convesso e non orientato) compreso tra **v** e **w** si può usare la formula

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|}\right).$$

Proprietà del prodotto scalare

2) determinare il vettore proiezione ortogonale di **v** nella direzione di **w** (senza calcolare l'angolo tra i due vettori). Se **w** è un versore , tale proiezione è data da $(|\mathbf{v}|\cos\theta)\,\mathbf{w} = (|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cos\theta)\,\mathbf{w} = (\mathbf{v}\bullet\mathbf{w})\,\mathbf{w}$.
Se **w** non è un versore, basta dividerlo per il suo modulo per ottenere un versore.

Esercizi

(1) Dire per quali valori di k i seguenti vettori sono ortogonali:

$$v := (1, k-2, 3)\,, \quad w := (k, 2, 5)$$

soluzione:

$$(1, k-2, 3) \cdot (k, 2, 5) = k + 2k - 4 + 15 = 0$$

$$k = -\frac{11}{3}$$

Esercizi

(2) Dire per quali valori di k l'angolo tra i seguenti vettori e' di $\pi/3$:

$$v := (k, 1)\,, \quad w := (1, -2)$$

soluzione:

$$\cos \pi/3 = \frac{v \cdot w}{|v||w|},$$

$|v| = \sqrt{k^2 + 1^2}, |w| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{5},$

$v \cdot w = k - 2, \cos \pi/3 = \frac{1}{2} \to$

$$\frac{1}{4} = \frac{(k-2)^2}{(k^2+1)\,5}$$

$$5\left(k^2 + 1\right) = 4\,(k-2)^2$$

Esercizi

$$5k^2 + 5 = 4\left(k^2 + 4 - 4k\right)$$

$$5k^2 + 5 = 4\left(k^2 + 4 - 4k\right)$$

$$5k^2 + 5 = 4k^2 + 16 - 16k$$

$$k^2 + 16k - 11 = 0$$

soluzioni:
$k_1 = -8 + \sqrt{64 + 11} = -8 + 5\sqrt{3}$,
$k_2 = -8 - 5\sqrt{3}$

Prodotto vettoriale

Nello spazio ordinario (e solo in esso!) è possibile definire un altro prodotto tra due vettori **v** e **w**.

Definizione Dati due vettori **v** e **w** dello spazio vettoriale di dimensione 3, chiamiamo **prodotto vettoriale** di **v** e **w** il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ che ha

• per modulo il prodotto $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \sin\theta$, ove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo convesso compreso tra i due vettori

• per direzione quella ortogonale al piano individuato dai due vettori

• per verso quello che rende destrorsa la terna $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$. (Questo significa che i tre vettori sono orientati rispettivamente come indice, medio e pollice della mano destra.)

Prodotto vettoriale

Notiamo che il modulo $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha due lati coincidenti con i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e quindi $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = 0$ se e solo se uno dei due vettori è nullo oppure i due vettori hanno la stessa direzione.
Dunque

Proposizione Il prodotto vettoriale di due vettori non nulli è nullo se e solo se i due vettori hanno la stessa direzione.

Proprietà del prodotto vettoriale

• anticommutativa: per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$

Prodotto vettoriale

- distributive: per ogni terna di vettori **u**, **v** e **w** si ha

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \qquad \text{e}$$
$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{w} \wedge \mathbf{u};$$

- di omogeneità: per ogni coppia di vettori **v** e **w** e per ogni $s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(s\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \wedge (s\mathbf{w}) = s(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w});$$

- di annullamento per ogni vettore **v** si ha $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (vettore nullo).

Prodotto vettoriale

Ricordando che **i**, **j** e **k** sono i versori aventi la direzione e il verso degli assi x, y e z risulta chiaro che

$$\boxed{\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j},}$$

e per la proprietà anticommutativa

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Prodotto vettoriale

Utilizzando queste proprietà si verifica che se $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, si può formulare il prodotto vettoriale in termini di componenti scalari come segue. Infatti per le proprietà distributive si ha

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \wedge \mathbf{w} =$$

$$a_1\mathbf{i} \wedge \mathbf{w} + a_2\mathbf{j} \wedge \mathbf{w} + a_3\mathbf{k} \wedge \mathbf{w} =$$

$$a_1\mathbf{i} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k} \wedge (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) =$$

$$(a_1\mathbf{i} \wedge b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \wedge b_2\mathbf{j} + a_1\mathbf{i} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{j} \wedge b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \wedge b_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{j} \wedge b_3\mathbf{k}) + (a_3\mathbf{k} \wedge b_1\mathbf{i} + a_3\mathbf{k} \wedge b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \wedge b_3\mathbf{k}).$$

Prodotto vettoriale

Per la proprietà di annullamento $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Quindi utilizzando la proprietà di omogeneità si ottiene: $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1 b_2 \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + (a_2 b_1 \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + a_2 b_3 \mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + (a_3 b_1 \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + a_3 b_2 \mathbf{k} \wedge \mathbf{j})$, cioè, per la proprietà anticommutativa,

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}.$$

$$\boxed{\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\mathbf{k}.}$$

Prodotto vettoriale

Si vede che la prima componente del prodotto vettoriale è costruita solo con le seconde e le terze componenti dei due vettori **v** e **w** (e analogamente per le altre componenti).

Per ricordarsi questa formula è comodo far uso della terminologia dei determinanti . Si osserva che $a_2 b_3 - a_3 b_2$ è proprio il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, che viene rappresentato brevemente come $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. Proseguendo allo stesso modo sulle altre componenti si trova:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Prodotto vettoriale

Si compatta ancor di più questa formula scrivendo

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

che si può leggere dicendo che il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ si ottiene formalmente come il determinante di una matrice quadrata di ordine 3 (a elementi vettoriali e numerici) la cui prima riga è formata dai versori fondamentali, la seconda dal vettore delle componenti di **v**, la terza dal vettore delle componenti di **w**.

Prodotto vettoriale

Esempio

• Determiniamo un vettore **u** dello spazio che risulta contemporaneamente ortogonale ai vettori $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{w} = (0, 2, 1)$. Visto che per definizione il prodotto vettoriale ha direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori, sicuramente il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ verifica la condizione. Si può quindi scrivere

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (2, -1, 2).$$

Esempio

• Calcoliamo il prodotto vettoriale tra i vettori $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.Si può scrivere

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 1\mathbf{k} = (-1, 2, -1).$$

Si verifica immediatamente in questo caso che il prodotto vettoriale è ortogonale a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

Prodotto vettoriale

Attenzione.

Al contrario del prodotto scalare, il prodotto vettoriale può essere applicato ripetutamente visto che il risultato del prodotto vettoriale è ancora un vettore. Ma per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa. Ad esempio

$$\mathbf{i} \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \qquad \text{mentre}$$

$$(\mathbf{i} \wedge \mathbf{i}) \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$