# DIVERGENZE IN TEORIA DEI CAMPI [S.15.4]

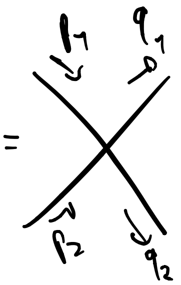
In genere, calcolando ampiezze ad ordini superiori in teoria delle perturbazioni, si incontrano DIVERGENZE.

**Esempio**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

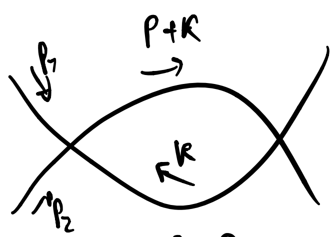
Calcoliamo l'ampiezza di scattering $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$.

LIVELLO ALBERO: Tutti i momenti nei propagatori interi, se presenti, sono fissati in termini dei momenti degli stati iniziali e finali.

$i\mathcal{M}_1 =$  $= -i\lambda$



A UN LOOP: Adesso c'è un momento libero: $k$

$i\mathcal{M}_2 =$  $+ \dots = (-i\lambda)^2 \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{fattore di simmetria}} \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}}_{\text{integrale del loop}} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon} + \dots$



$p = p_1 + p_2$

per $p \ll k$ $\left(|k_\mu| \gg |p_\mu|\right)$ $\quad i\mathcal{M}_2 \sim \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \sim \lambda^2 \int_0^{\overset{\text{cutoff}}{\Lambda}} \frac{dk}{k} \sim \lambda^2 \log \Lambda$

È divergente per $\Lambda \to \infty$.

• Come possiamo dar senso a questi calcoli?

$\Rightarrow$ la soluzione sta nel fatto che i singoli diagrammi divergenti NON SONO OSSERVABILI.

Introduciamo quindi:

• un REGOLATORE (tipo $\Lambda$) che rende il conto finito

• una procedura per esprimere PREDIZIONI in termini di altre osservabili (RINORMALIZZAZIONE)

Alla fine del conto si rimuove il regolatore ($\Lambda \to \infty$) ed il risultato deve essere INDIPENDENTE dal regolatore.

Calcoliamo $i\mathcal{M}_2$ nel caso $m=0$ (ci sono anche diagrammi $t$, $s$)

$$i\mathcal{M}_2 = \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2(p-k)^2} \leftarrow$$

è uno scalare quindi può dipendere solo da $p^2 = s$

Ci aspettiamo $i\mathcal{M}_2 \sim \lambda^2 \log\frac{s}{\Lambda^2}$

Deriviamo in $s$ per rimuovere la divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{M}_2(s) = \frac{p^\mu}{2s}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i)\lambda^2}{2s}p^\mu\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-(p-k)_\mu}{k^2(p-k)^2} = \frac{i\lambda^2}{2s}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(p^2-pk)}{k^2(p-k)^4}$$

$$\sim \int\frac{dk\, k^3 k}{k^6} \sim \int\frac{dk}{k^2}$$

è finito

vedremo in seguito

$$\ldots = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}_2 = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log s + C \equiv -\frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2}$$

$$C = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\log\Lambda^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{M}(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2}}$$

Abbiamo un risultato finito ma dipendente da $\Lambda$.

$\Rightarrow$ La differenza tra due $\mathcal{M}(s)$ è FINITA

$$\mathcal{M}(s_1) - \mathcal{M}(s_2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s_2}{s_1}$$

Ma $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2$ è un'osservabile, quindi come dare un senso a $\mathcal{M}(s)$?

- La presenza del logaritmo è un tipico effetto delle correzioni radiative.
  Diagrammi a livello albero sono sempre solo polinomi razionali dei momenti, masse ed accoppiamenti.

$\Rightarrow$ Cos'è "$\lambda$" ?

l'accoppiamento $\mathcal{L} \supset \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ parametrizza per esempio la forza dello scattering $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$.

Possiamo quindi pensare di misurare $\lambda$ a partire dal processo $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$. Però questo non è solo proporzionale a $\lambda$ ma ha anche tutti i contributi radiativi (divergenti)

$\Rightarrow$ DEFINIAMO l'accoppiamento RINORMALIZZATO $\lambda_R$ come l'ampiezza $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$ a una certa energia $s_0$:

$$\lambda_R \equiv -\mathcal{M}(s_0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} + \dots$$

da $\sigma(s_0)$ $\Rightarrow$ $\lambda_R$ è finito $\Rightarrow$ $\lambda$ è infinito per compensare $\log\Lambda^2$

Risolviamo per $\lambda$:

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots$$

$$\lambda_R = \left(\lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots\right) + \frac{\left(\lambda_R + a\lambda_R^2 + \dots\right)^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2}$$

$$= \lambda_R + a\lambda_R^2 + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2}$$

$$\boxed{\lambda = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} + O(\lambda_R^3)}$$

Esprimiamo ora l'ampiezza $\mathcal{M}(s)$ in termini di $\lambda_R$ (ottenuto da $\mathcal{M}(s_0)$)

$$\mathcal{M}(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s_0}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{\Lambda^2} + \ldots =$$

$$\boxed{\mathcal{M}(s) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\log\frac{s}{s_0}}$$

$\Rightarrow$ Possiamo PREDIRE $\mathcal{M}(s)$ a altre energie partendo da una misura fatta a $s_0$.

Questa procedura per esprimere ampiezze in termini di parametri (accoppiamenti, campi, masse) definiti a partire da osservabili fisiche è chiamata RINORMALIZZAZIONE con uno schema ON-SHELL.

Una teoria che ha bisogno di un numero finito di osservabili per riassorbire tutte le divergenze in tutte le altre predizioni, è chiamata RINORMALIZZABILE.

Se, invece, occorre un numero infinito di osservabili, la teoria è non-rinormalizzabile.