Moto centrale.

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V_{eff}(r) \qquad V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$\downarrow$

Possiamo trattare questo problema a 1 grado di lib. come fatto nella prima parte del corso.

In particolare questo è un sist. 1dim. conservativo, con cost. del moto data dall'energia

cost. $\rightarrow$ $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r)$

$\downarrow$ inversione

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)} \Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = t_0 + \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

$\rightsquigarrow$ inversione di $t(r)$

$r(t)$

Ricordiamo che $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ cioè $d\theta = \frac{\ell}{mr^2} dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\ell \, dt'}{mr^2(t')}$

$$\rightsquigarrow \quad d\theta = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}} \Rightarrow \theta(r) = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

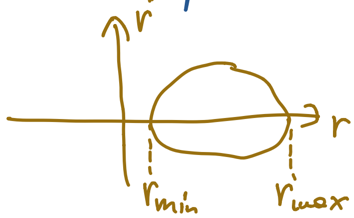
$\rightsquigarrow$ invers.

$r(\theta)$

Consideriamo moti a $E<0$ (orbite limitate nel piano; chiuse nel piano di fase)

- moto di r è periodico con periodo $T_r(E,l)$
- ogni periodo di r, $\theta(t)$ avanza di una quantità $\Delta\theta$:

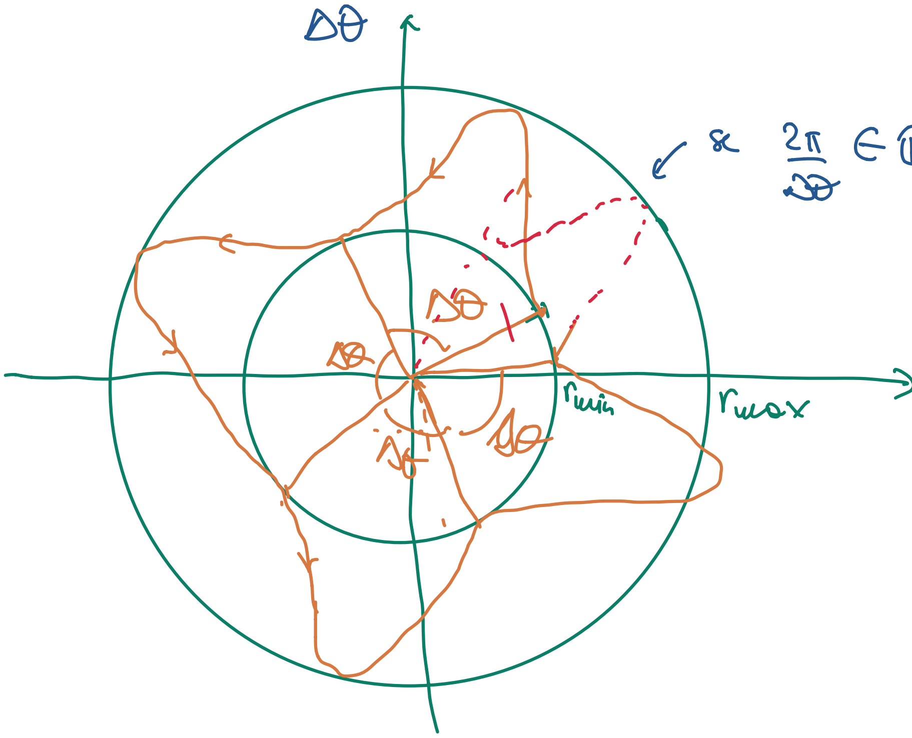
$$\Delta\theta = 2\frac{l}{\sqrt{2m}}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-V_{eff}(r)}}$$



- θ è una variabile periodica di periodo 2π

$\Rightarrow$ l'orbita nel piano è CHIUSA se

$$\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$$



se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$, prima o poi l'orbita si chiude.

Altrimenti il moto è detto "a rosetta" e l'orbita non è chiusa

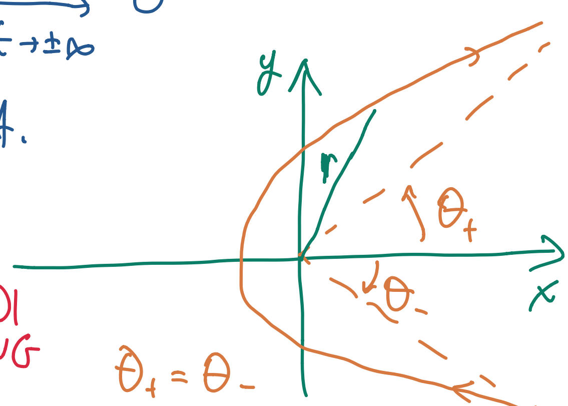
Consideriamo il caso $E>0$ (orbite illimitate)

$$r \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \infty \quad\Rightarrow\quad \dot\theta = \frac{l}{mr^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$

cioè $\theta(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \theta_\pm$ cost.

$$\Delta\theta = \theta_+ - \theta_- = 2\frac{l}{\sqrt{2m}}\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-V_{eff}(r)}}$$

ANGOLO DI SCATTERING



Utilizziamo $\theta(r) = \theta_0' + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$ per calcolare le

orbite nel caso Kepleriano $V(r) = -\frac{K}{r}$,

cioè $V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$

$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\eta}{K}}$

$\frac{mK}{\ell^2} = \frac{1}{\eta}$

$$\theta - \theta_0' = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mK}{\ell^2\rho} - \frac{1}{\rho^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \left(\frac{2}{\eta\rho} - \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\eta^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{1}{\eta^2}\left\{\underbrace{\left(\frac{2E\eta}{K} + 1\right)}_{= e^2} - \left(\frac{\eta}{\rho} - 1\right)^2\right.}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{\eta\, d\rho}{\rho^2\sqrt{e^2 - e^2\left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}}$$

$$= \frac{\eta}{e}\int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}}$$

$w = \frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}$

$dw = -\frac{\eta}{e\rho^2}\, d\rho$

$$= -\int_{\frac{\eta}{er_0} - \frac{1}{e}}^{\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \arccos\left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}\right) + \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \theta(r) = \arccos\left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}\right) + \underbrace{\theta_0' + \text{cost.}}_{\equiv \theta_0}$$

invertibile $\rightsquigarrow$ $$\frac{\eta}{e\,r(\theta)} - \frac{1}{e} = \cos(\theta - \theta_0)$$

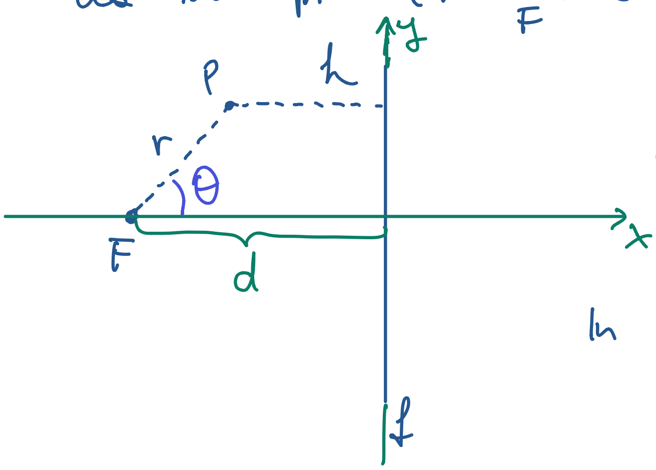
$$\Rightarrow \quad \frac{\eta}{\cancel{e}\,r(\theta)} = \frac{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}{\cancel{e}}$$

$$\Rightarrow \quad r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \qquad (*) \quad !$$

Quando un corpo si muove in un campo di forze centrali con potenziale Kepleriano, $V(r) = -\frac{k}{r}$, esso traccia sul piano un'orbita data da $(*)$, che è una CONICA.

Coniche

Coniche: curve nel piano date dal luogo dei pti P per cui è costante il rapporto delle distanze r e h da un pto (FUOCO) F e da una retta (DIRETTRICE) f



$$e \equiv \frac{r}{h} \qquad \eta \equiv d \cdot e$$

F ha coord. $(-d, 0)$

P ha coord. (x, y)

In coordinate cartesiane

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

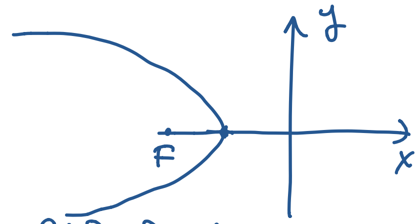
$$h = |x|$$

Eq. della conica : $\frac{r^2}{h^2} = e^2$, cioè

$$(x+d)^2 + y^2 = e^2x^2$$

$$x^2 + 2dx + d^2 + y^2 - e^2x^2 = 0$$

$$x^2(1-e^2) + 2dx + y^2 = -d^2$$



- se $e = 1$ $\quad x = -\frac{1}{2d}y^2 - \frac{1}{2}d \quad \rightarrow$ PARABOLA
- se $e \neq 1$:

$$x^2 + 2\frac{d}{1-e^2}x + \frac{d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{d^2}{1-e^2} + \frac{d^2}{(1-e)^2}$$

$$\Big(\underbrace{x + \frac{d}{1-e^2}}_{\equiv \tilde{x}}\Big)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\tilde{x}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} \underset{\text{iperbole}}{\overset{\text{ellisse}}{\pm}} \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{(ed)^2}{1-e^2}} = 1$$

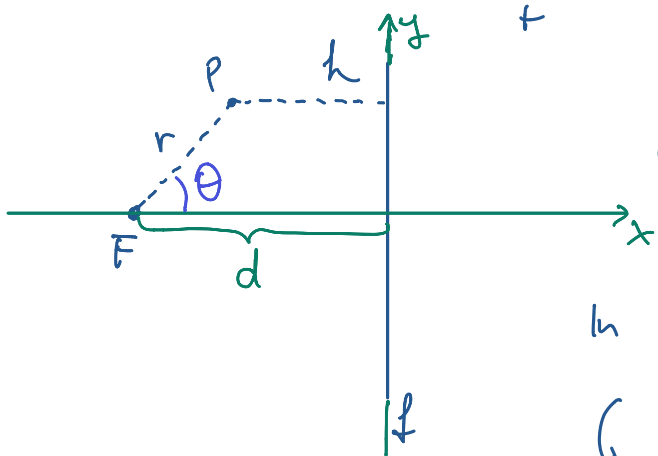
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{|1-e^2|}}$$

se $e < 1$ ellisse

$e > 1$ iperbole

+



$$e \equiv \frac{r}{h} \qquad \eta \equiv d \cdot e$$

In coordinate polari (con origine in F)

$$\begin{cases} h = d - r\cos\theta \\ \frac{r}{e} = d - r\cos\theta \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r\left(\frac{1}{e} + \cos\theta\right) = \frac{\eta}{e} \quad \Rightarrow \quad r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta}$$

Per un'ellisse ($e<1$)

$$a = \frac{\eta}{1-e^2} \qquad b = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}} \qquad a^2 = \frac{b^2}{1-e^2} > b^2$$

$$\underline{b^2 = \eta a}$$

Leggi di Keplero

1) Pianeti si muovono descrivendo delle ellissi, con fuoco nel Sole.
2) $\bar{r}(t)$ (con origine nel Sole) descrive aree uguali in tempi uguali (cioè velocità areolare cost.)
3) Detto T il periodo di rivoluzione, T^2 è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

Leggi 1) e 2) già dimostrate. 3):

<u>Prop.</u> Periodo T del moto sulle ellissi è legato al semiasse magg. da

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}$$

<u>Dim.</u> Usiamo la legge 2)

$$T = \frac{\text{area dell'ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi a \cdot b}{\frac{1}{2} r\dot{\theta}} = \frac{\pi a b}{\ell/2m}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4m^2\pi^2 a^2 b^2}{\ell^2} = \frac{4m^2\pi^2 a^2}{\ell^2}\eta \cdot a =$$

$$= \frac{4m^2\pi^2 a^3}{\ell^2}\frac{\ell^2}{mK} = \frac{4\pi^2 m}{K} \cdot a^3 \quad //$$

$$V(r) = -\frac{G\, m \cdot M}{r} \qquad K = Gm.M$$

Keplero dice:
m = massa pianeta
M = massa Sole

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} a^3 \quad \text{indip. da } m$$

(

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta}$$

$$\eta = \frac{l^2}{mk} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

Se $k \propto m \Rightarrow \eta$ ed e non dipendono da m

perché $l \propto m$

$E \propto m$

$\leadsto$ Noi siamo partiti con m massa RIDOTTA!