

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 29 APRILE 2020

— PRIMA PARTE

Eq. di Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial k}{\partial q_i} = Q_i \quad i=1, \dots, l$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad L = k - U$$

→ eq. differenziali 2° ordine

$$k = \underbrace{k(q, t)} + \underbrace{b(q, t) \cdot \dot{q}} + \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{A}(q, t) \dot{\underline{q}}$$

→ sistema di eq. differenziali 1° ordine

$$z \rightarrow (\underline{q}, \underline{p}) \quad p_i = \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\underline{p} = \underline{b} + \underline{A} \cdot \dot{\underline{q}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} q_i = f_i(q, p, t) \\ \frac{d}{dt} p_i = f_i(q, p, t) \end{cases}$$

Sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}, t) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

↙ determina la dinamica

conditioni iniziali

$$\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$$

→ Scriviamo $\underline{y}(t; \underline{y}_0)$ la soluzione

(di solito $\underline{y}(t)$: aggiungiamo $\underline{y}_0$)

Concetto di Traiettoria "uscendo da $\underline{y}_0$ "

$$\Gamma_{\underline{y}_0} = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{2l} : \underline{y} = \underline{y}(t; \underline{y}_0), t \in [0, \tau) \}$$

nello spazio delle fasi

$$\text{Soluzioni stazionarie} : \begin{cases} \underline{q}(t) = \underline{q}_E \\ \underline{p}(t) = \underline{0} \end{cases}$$

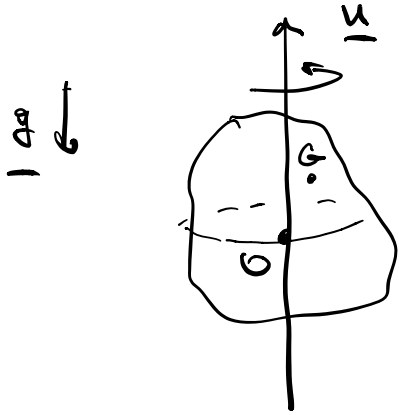
$$\text{Da cui : } \underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$$

Se lo sostituiamo in

$$\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}, t) \Rightarrow \underline{0} = \underline{F}(\underline{y}_E, t) \quad \forall t$$

Quando $\vec{F}$ non dipende esplicitamente dal tempo $\rightarrow$ sistema dinamico autonomo

Esempio Consideriamo un rigido in rotazione attorno ad un asse fisso verticale



soggetto al peso e a una coppia di attrito di momento $-v \underline{\omega}$

φ angolo di rotazione

I_0 : momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione $\underline{\omega}$

Allora : $K = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2$

$V_{\text{peso}} = \text{costante}$ (perché G ha altezza costante)

il momento $-v \underline{\omega}$ da una forza generalizzata

$$-v \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} = -v \dot{\varphi}$$

Momento coniugato a φ

$$p = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 \right) = I_0 \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{p}{I_0}}$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = f(q, p, t)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(\frac{\partial k}{\partial \varphi} + Q \right)_{\dot{q}=r} = (-v\dot{\varphi})_{\dot{q}=r}$$

eq. di Lagrange

$$= -v \frac{p}{I_0}$$

Allora

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p}{I_0} = \left(\frac{1}{I_0} \right) p \\ \dot{p} = -v \frac{p}{I_0} = \left(-\frac{v}{I_0} \right) p \end{cases}$$

Consideriamo condizioni iniziali generiche

$$\begin{cases} \varphi(t=0) = \varphi_0 \\ p(t=0) = p_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \frac{p_0}{v} \left(1 - \exp\left(-\frac{v}{I_0} t\right) \right) \\ p(t) = p_0 \exp\left(-\frac{v}{I_0} t\right) \end{cases}$$

da cui $\underline{y}(t; \underline{y}_0) = \left(\varphi(t; \varphi_0, p_0), p(t; \varphi_0, p_0) \right)$

Le soluzioni di equilibrio sono

$$\underline{y_e} = (\varphi_0, 0) \quad \forall \varphi_0$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} = -\frac{\nu}{I_0} p \end{cases} \quad \text{dobbiamo annullare il destro} \quad \rightarrow \quad p = 0$$

In particolare

- $p_0 = 0 \rightarrow$ la traiettoria uscente da $(\varphi_0, 0)$ è il punto $(\varphi_0, 0)$ stesso

- $p_0 \neq 0$, Cominciamo a muovere

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\nu}{I_0} t\right) \quad \left[p(t) = p_0 e^{-\frac{\nu}{I_0} t} \right]$$

$$\underline{\varphi(t)} = \varphi_0 + \frac{p_0}{\nu} \left(1 - \exp\left(-\frac{\nu}{I_0} t\right) \right) =$$

$$= \varphi_0 + \frac{p_0}{\nu} - \frac{p_0}{\nu} \frac{p}{p_0} = \underline{\varphi_0 + \frac{p_0}{\nu} - \frac{p}{\nu}}$$

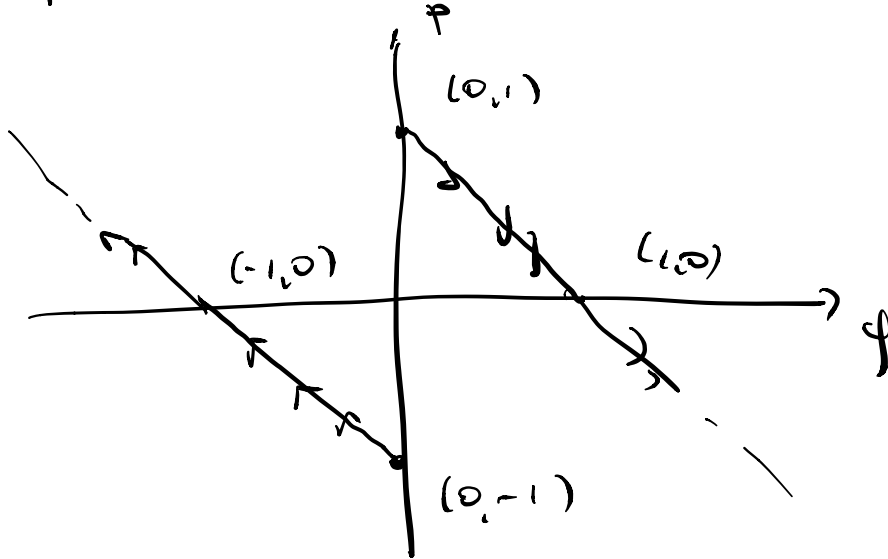
$$\Rightarrow \quad p - p_0 = -\nu (\varphi - \varphi_0) \quad \text{segmenti di retta nel piano } (p, \varphi)$$

$\rightarrow$ pendente $-\nu$, passante per (φ_0, p_0)

Consideriamo $v = 1 > 0$: $(p - p_0) = -(q - q_0)$

Trasformazione uscenti: da $(q_0, p_0) = (0, 1)$

$$(q_0, p_0) = (0, -1)$$



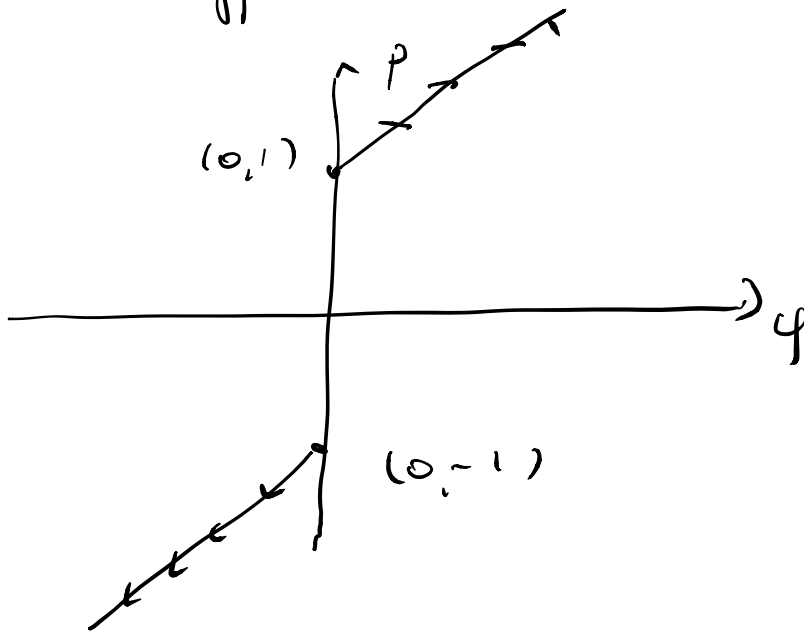
↑
conditioni
iniziali

$$(p - p_0) = -v(q - q_0)$$

$v \geq 1$

→ soluzioni nel piano (p, q) .

Se supponiamo $v = -1 \Leftrightarrow (p - p_0) = (q - q_0)$



condition
iniziali

$$(q_0, p_0) = (0, 1)$$

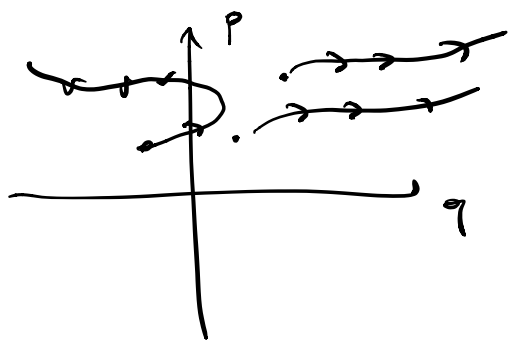
$$(q_0, p_0) = (0, -1)$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 29 APRILE 2020

— SECONDA PARTE

Soluzioni di sistemi dinamici $\rightarrow$ Proiezione
 nello spazio delle fasi



Consideriamo un sistema meccanico
 conservativo, vincoli fissi, l gradi di
 libertà

$\rightarrow$ l'energia si conserva. $H = K + V$

conservata: $H(\underline{y}(t; \underline{y}_0)) = H(\underline{y}_0) = E$

$\uparrow$ soluzione $\uparrow$
 $t=0$

Graficamente: la proiezione
 uscente dal dato iniziale $\underline{y}_0$, è sempre
 contenuta nell'insieme di livello E di

H :

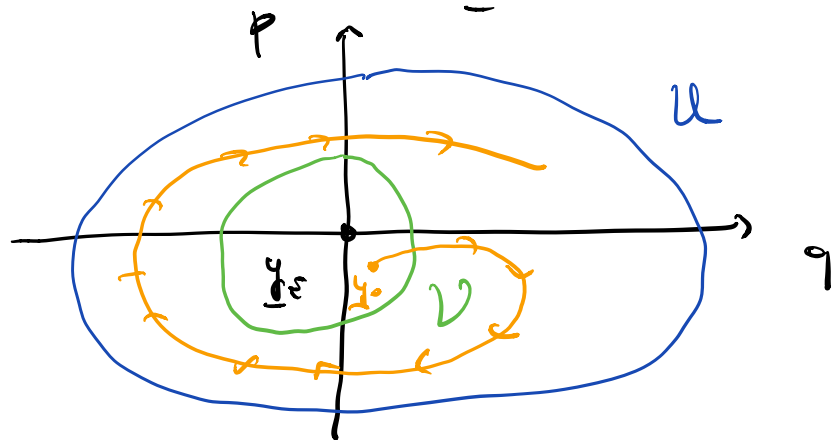
$$\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{2l} : H(\underline{y}) = E = H(\underline{y}_0) \}$$

→ Possiamo ottenere informazioni qualitative sul moto

$$H = K + V = \text{costante} \quad (= E = H(y_0))$$

Definizione (Stabilità di Liapunov)

Una soluzione di equilibrio $\underline{y}_E$ è stabile se per ogni intorno U di $\underline{y}_E$, esiste un intorno V di "confineamento" di $\underline{y}_E$ tale che $\forall \underline{y}_0 \in V$, la traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è contenuta in U



$\underline{y}_E$ stabile

Teorema di Liapunov

Consideriamo

un sistema dinamico

$$\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$$

Tale che

1) $\underline{F}$ dipende solo da $\underline{y}$ ed è regolare

2) $\exists$ una funzione $H(\underline{y})$ regolare,
Tale che per ogni soluzione $\underline{y}(\tau)$
si abbia

$$\underline{\frac{d}{d\tau} H(\underline{y}(\tau)) \leq 0 \quad \tau \in [0, \tau)}$$

3) $\underline{y}(\tau) = \underline{y}_e$ è una soluzione costante
e $\underline{y}_e$ è un minimo proprio di
 $H(\underline{y})$

Allora 1), 2), 3) $\Rightarrow \underline{y}_e$ è stabile
(secondo
Lyapunov)

Dimostrazione

a) Dal Teorema, ipotesi 3) (unica di H)

$\rightarrow \exists$ intorno Ω di $\underline{y}_e$ tale che

$$\underline{H(\underline{y}) > H(\underline{y}_e) \quad \forall \underline{y} \in \Omega}$$

Senza ipotesi generalità possiamo prendere $H(\underline{y}_\varepsilon) = 0$

b) $\forall U \subset \Omega$ intorno di $\underline{y}_\varepsilon$,

chiamiamo ∂U il bordo di U

Definiamo $E \in \mathbb{R}$ come

$$E := \min_{\underline{y} \in \partial U} H(\underline{y})$$

segue da a) che $E > 0$

c) Poiché H è regolare

$$\lim_{\underline{y} \rightarrow \underline{y}_\varepsilon} H(\underline{y}) = H(\underline{y}_\varepsilon) = 0$$

Allora $\exists$ intorno V di $\underline{y}_\varepsilon$ tale che

$$|H(\underline{y}) - H(\underline{y}_\varepsilon)| = H(\underline{y}) < \frac{E}{2}$$

$$\forall \underline{y} \in V$$

d) Per dimostrare il Teorema,

dimostriamo che $\forall \underline{y}_0 \in V$, la

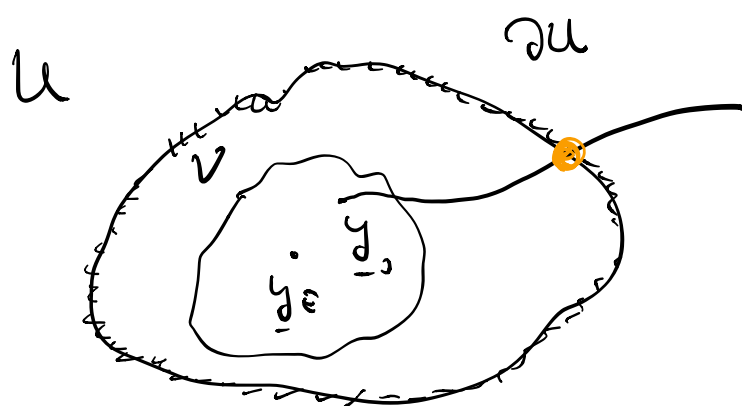
traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è contenuta

in U - $\Gamma_{\underline{y}_0}$ traiettoria uscente.

Supponiamo per assurdo che $\Gamma_{\underline{y}_0}$ esca da

U . Allora $\exists$ un istante $\bar{t}$ tale

che $\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0) \in \partial U$



$$\Rightarrow H(\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0)) \geq E$$

$$E = \min_{\underline{y} \in \partial U} H(\underline{y})$$

Tuttavia sappiamo

$$\text{che } \frac{d}{dt} H \leq 0 \Rightarrow$$

H non cresce lungo la traiettoria $\Gamma_{\underline{y}_0}$

Quindi

$$H(\underline{y}(\bar{t}; \underline{y}_0)) \leq H(\underline{y}_0) \leq \frac{E}{2}$$

$$\uparrow$$

$\underline{y}_0 \in V$, per c)

→ contraddittorio

→ il Teorema è dimostrato

Così la traiettoria uscente da $\underline{y}_0 \in V$ deve rimanere confinata in U

$\Rightarrow \underline{y_f}$ è stabile secondo Liapunov
c.v.d.

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 29 APRILE 2020

- TERZA PARTE

Criterio di Stabilità di Dirichlet

Consideriamo un sistema autonomo
a l gradi di libertà, regolare e

Tale che:

1. Vincoli fissi
2. forze conservative con potenziale $\underline{V(q)}$ (ed eventualmente forze dissipative) tutte indipendenti dal tempo
3. la configurazione di eq. $\underline{q_f}$ sia un minimo proprio di $\underline{V(q)}$

Allora $\underline{q}_E$ è stabile

Dimostrazione usa il Teorema di
Liapunov

Γ $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$ se $\underline{y}_E$ stazionario e
minimo proprio di H è stabile
se H tale che $\frac{d}{dt} H(\underline{y}(t)) \leq 0$ ✓

Dalle ipotesi 1) e 2)

$$1) \rightarrow \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \quad (\text{no tempo esplicito})$$
$$\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$$

$$2) \rightarrow \frac{d}{dt} (K + V) = W_{\text{dissipazione}} \leq 0$$

Allora prendiamo $H = K + V$ (cioè
abbiamo H t.c. $\frac{d}{dt} H \leq 0$)

Ipotesi 3) $\Rightarrow \underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$ è un
minimo proprio di H . Infatti:

→ $\underline{q}_E$ è un minimo proprio di V

→ $\underline{p} = \underline{0}$ è un minimo proprio di K (definito positivo rispetto alle $\underline{p}$)

1), 2), 3) di Dirichlet $\Rightarrow$ 1), 2), 3) di Liapounov

Quindi possiamo usare il Teorema di Liapounov per concludere che $\underline{q}_E$ è stabile c.v.d.

Esempio Consideriamo un rigido in rotazione intorno ad un asse fisso $\underline{u}$, ($\underline{u}$ vers di rotazione, φ angolo di rotazione), in moto sotto l'azione di un momento $\underline{v} = -c \varphi^3 \underline{u}$
costante > 0

Allora $H = K + V$

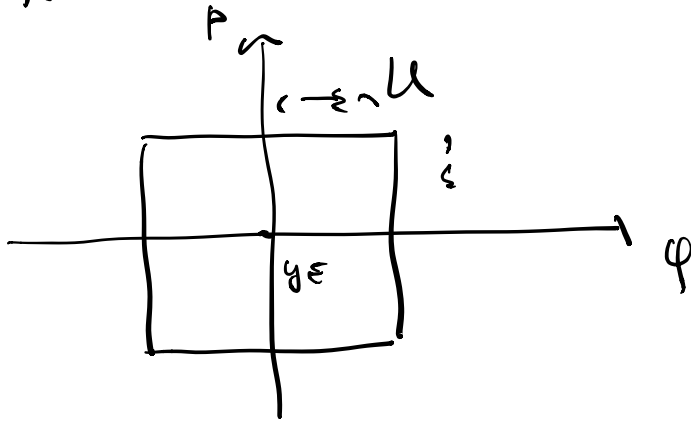
$$(K = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \rightarrow p = \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = I \dot{\varphi}$$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{p}{I} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{I})$$

$$H = \frac{p^2}{2I} + \frac{c}{4} \varphi^4$$

$$\underline{y}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi \quad p$$

Pseudianus $\mathcal{U} = \{ (\varphi, p) : |\varphi| < \varepsilon, |p| < \varepsilon \}$



$$\bar{E} = \min_{\underline{y} \in \partial \mathcal{U}} H(\underline{y})$$

$$= \min \left(\frac{\varepsilon^2}{2I}, \frac{c}{4} \varepsilon^4 \right)$$

Pseudianus

$$\mathcal{V} = \{ (\varphi, p) : |\varphi| < \delta, |p| < \delta \} \quad \delta > 0$$

So that $\max_{\underline{y} \in \mathcal{V}} H(\underline{y}) \leq \frac{\delta^2}{2I} + \frac{c}{4} \delta^4 < \frac{\bar{E}}{2}$

$$\Rightarrow \forall \underline{y}_0 \in \mathcal{V}, \quad \underline{y}(t; \underline{y}_0) \in \mathcal{U}$$

$$\forall t \in [0, T]$$

Criterio Statico di Stabilità

(equivalente al criterio di Dirichlet)
forse conservativo

Sia $\underline{q}_e$ la configurazione di equilibrio
consideriamo uno spostamento virtuale
ad una configurazione variabile $\underline{q}^v$
parametrizzato dal tempo virtuale $\tau \in [a, b]$
 $\underline{q} = \underline{q}(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, $\underline{q}(a) = \underline{q}_e$, $\underline{q}(b) = \underline{q}^v$

Allora il lavoro virtuale per andare da

$\underline{q}_e$ a $\underline{q}^v$ è dato da

$$LV = \int_a^b \sum_{i=1}^l Q_i \frac{dq_i}{d\tau} d\tau = - \int_a^b \sum_{i=1}^l \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\tau} d\tau$$

$\uparrow$
 $Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$

$$= - \int_a^b \frac{dV(\underline{q}(\tau))}{d\tau} d\tau = - (V(\underline{q}^v) - V(\underline{q}_e))$$

Quindi

q_ε è un minimo
proprio di V
(criterio di
Dirichlet)

$\Rightarrow$

il lavoro virtuale
per andare da
 q_ε a $q^\nu = q_\varepsilon + \delta q$
è negativo
"criterio statico"