3ª Legge Keplero

Keplero dice:

m = massa pianeta $\Longrightarrow$ $K \simeq G m \cdot M_s \Longrightarrow V(r) = -\dfrac{G \cancel{m} \cdot M_s}{r}$

M = massa Sole

$$\frac{T^2}{a^3} \simeq \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} \quad (\ddagger) \quad \text{indip. da massa } m$$

Ma data m_p massa pianeta

e M_s massa del Sole

ho $m = \dfrac{m_p \cdot M_s}{m_p + M_s}$ e $M = m_p + M_s$

e $K = G\, m_p\, M_s$!

$$\rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \frac{4\pi^2 (m_p M_s)/(m_p+M_s)}{G\, m_p\, M_s} = \frac{4\pi^2}{G M_s} \frac{1}{\left(1+\frac{m_p}{M_s}\right)} \,!$$

Se $m_p << M_s$

allora $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G M_s} \dfrac{1}{\left(1+\frac{m_p}{M_s}\right)} \simeq \dfrac{4\pi^2}{G M_s}\left(1 - \dfrac{m_p}{M_s}\right) + \dots$

correzione a $(\ddagger)$

LEGGE ORARIA, cioè soluz. delle eq. del moto

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{\frac{k}{\tilde{r}} - \frac{\ell^2}{2m\tilde{r}^2} + E}} \; (\cdot) \rightarrow t(r) \xrightarrow[inv.]{} r(t)$$

$$d\theta = \frac{\ell}{mr^2} dt \rightarrow t = \frac{m}{\ell} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\tilde{\theta})^2 d\tilde{\theta} \rightarrow t(\theta) \xrightarrow[inv.]{} \theta(t)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\ell}{m r(t')^2} dt' \; (\cdot\cdot)$$

$$= \underbrace{\frac{m\eta^2}{\ell}}_{= \frac{\ell^3}{mk^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{[1 + e\cos(\tilde{\theta} - \theta')]^2}$$

Integrali da fare non sono complicati e quindi $t(r)$ e $t(\theta)$ sono esprimibili in termini di funzioni elementari. Ciò che è complicato spesso è l'inversione di queste funz. per trovare $r(t)$ e $\theta(t)$

Esempio: settiamo $\theta' = 0$ ($\theta = 0$ è il PERIELIO, cioè r_{min}) e consideriamo una traiettoria PARABOLICA ($e=1$)

$$t = \frac{\ell^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + \cos\tilde{\theta})^2} = \frac{\ell^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(\cos\tilde{\theta}/2)^2 (\cos\tilde{\theta}/2)^2}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$x = tg\frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\sin\tilde{\theta}/2}{\cos\tilde{\theta}/2} = \left(1 + tg^2\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)\frac{1}{2}d\tilde{\theta}$$

$$= \frac{\ell^3}{2mk^2} \int_0^{tg\,\theta/2} dx\,(1 + x^2)$$

$$= \frac{\ell^3}{2mk^2} \left[tg\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} tg^3\frac{\theta}{2} \right] \rightarrow t(\theta)$$

$\theta = 0 \leftrightarrow t = 0$

$\theta = \pm\pi \leftrightarrow t \rightarrow \pm\infty$

$t(\theta)$ è una funz. semplice, ma per ottenere $\theta(t)$ dobbiamo

trovare una soluz. dell'eq. CUBICA (complicato)
e infine invertire la tangente.

Una volta risolta e trovata $\theta(t)$, non occorre usare (·)
per trovare $r(t)$, ma basta sostituire $\theta(t)$ in $r(\theta)$
$\Rightarrow r(t) = r(\theta(t))$.

$r(\theta) \longrightarrow \theta(t) \longrightarrow r(t)$.

(Metodo alternativo: usare (·) per ricavare $r(t)$ e poi (··)
per ricavare $\theta(t)$).

ORBITA utilizzando vettore di (Laplace)-Runge-Lenz

Finora abbiamo trovato $r(\theta)$ in 2 modi:

1) risolvendo eq. di Lagr. (EQ. DIFF. $\underline{2°}$ ord) per il PROBL. RIDOTTO:
usato cost. del moto $\bar{M}$.

2) abbiamo utilizzato un'altra cost. del moto, l'ENERGIA
per ridurre l'eq. diff del 2° ord al 1° ord. (quadratura)

Ora introduciamo un'ulteriore <u>cost. del moto</u> che
ci permetterà di ridurre il probl. alla risoluz.
di un "eq. diff. all'ordine 0", cioè un'eq. algebrica.
(Questo è particolare per il prob. Kepleriano con $V(r) = -\frac{k}{r}$,
mentre 1) e 2) è generico per ogni moto in
un campo di forze centrali).

Nel moto kepleriano la seguente quantità vettoriale si conserva:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} \qquad \underline{\bar{M} = l\,\bar{e}_z}$$

$\bar{A}$ giace sul piano della traiettoria

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y$$

$$\underline{\dot{\bar{e}}_r} = -\dot\theta\sin\theta\,\bar{e}_x + \dot\theta\cos\theta\,\bar{e}_y = \underline{\dot\theta\,\bar{e}_\theta}$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\underline{\dot{\bar{e}}_\theta} = (-\cos\theta\,\bar{e}_x - \sin\theta\,\bar{e}_y)\dot\theta = \underline{-\dot\theta\,\bar{e}_r}$$

$$\bar{r} = r\,\bar{e}_r$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot\theta\,\bar{e}_\theta + \dot{r}\dot\theta\,\bar{e}_\theta + r\ddot\theta\,\bar{e}_\theta - r\dot\theta^2\bar{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot\theta^2)\bar{e}_r + (2\dot{r}\dot\theta + r\ddot\theta)\bar{e}_\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}_r \times \bar{e}_\theta &= \bar{e}_z \\ \bar{e}_r \times \bar{e}_z &= -\bar{e}_\theta \\ \bar{e}_\theta \times \bar{e}_z &= \bar{e}_r \end{aligned}\right\}$$

$$\bar{A} = -ml\dot{r}\,\bar{e}_\theta + mr\dot\theta l\,\bar{e}_r - mk\,\bar{e}_r$$

$$\dot{\bar{A}} = -ml\ddot{r}\,\bar{e}_\theta + 2ml\dot{r}\dot\theta\,\bar{e}_r + mr\ddot\theta l\,\bar{e}_r + mr\dot\theta^2 l\,\bar{e}_\theta - mk\dot\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$\dot\theta = \frac{l}{mr^2} \qquad \cancel{m}\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2r^3} \qquad \ddot\theta = -\frac{2l}{mr^3}\dot{r}$$

$$= \bar{e}_\theta m\left[-\frac{l}{m}\left(-\cancel{\frac{k}{r^2}} + \cancel{\frac{l^2}{mr^3}}\right) + \cancel{r\frac{l^3}{m^2r^4}} - \cancel{\frac{kl}{mr^2}}\right]$$

$$+\bar{e}_r m\left[\underbrace{2l\cancel{\dot{r}\dot\theta}}_{\frac{2l^2\dot{r}}{mr^2}} + \underbrace{\cancel{lr\ddot\theta}}_{lr\left(-\frac{2l}{mr^3}\right)\dot{r}}\right] = 0$$

quando $r(t)$ e $\theta(t)$ soddisfano le equazioni del moto.

[Ricordiamoci come avevamo usato la cost. del moto ENERGIA in 2) :

$$\underset{\text{cost.}}{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - V_{eff}(r) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}$$]

$\bar{A}$ cost. $\rightsquigarrow$ lo scriviamo $\boxed{\bar{A}(r,\dot r,\theta,\dot\theta) = a\cos\theta_0\,\bar{e}_x + a\,\mathrm{sen}\theta_0\,\bar{e}_y}$ (*)

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\bar{A} = -ml\dot r\,\bar{e}_\theta + mr\dot\theta l\,\bar{e}_r - mK\bar{e}_r$$

$$= (ml\dot r\,\mathrm{sen}\theta + mr\dot\theta l\cos\theta - mk\cos\theta)\,\bar{e}_x$$
$$+(-ml\dot r\cos\theta + mr\dot\theta l\,\mathrm{sen}\theta - mk\,\mathrm{sen}\theta)\,\bar{e}_y$$

$$\dot\theta = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow mr\dot\theta = lu$$

$$\dot r = r'(\theta)\dot\theta = = \frac{r'l}{mr^2} = -\frac{l}{m}u'$$
$$\Downarrow$$
$$m\dot r = -lu'$$

$$= (-l^2u'\,\mathrm{sen}\theta + l^2u\cos\theta - mk\cos\theta)\,\bar{e}_x$$
$$+(l^2u'\cos\theta + l^2u\,\mathrm{sen}\theta - mk\,\mathrm{sen}\theta)\,\bar{e}_y$$

(*)

$$\begin{cases} -u'\,\mathrm{sen}\theta + u\cos\theta = \dfrac{mk}{l^2}\cos\theta + \dfrac{a}{l^2}\cos\theta_0 & \cdot\cos\theta \\ \qquad + \\ u'\cos\theta + u\,\mathrm{sen}\theta = \dfrac{mk}{l^2}\mathrm{sen}\theta + \dfrac{a}{l^2}\mathrm{sen}\theta_0 & \cdot\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

↳ sistema lineare nelle incognite u e u'

cost. arbitraria che posso definire $a \equiv \dfrac{el^2}{\eta}$

$$u = \underbrace{\frac{mK}{l^2}}_{\frac{1}{\eta}} + \frac{a}{l^2}\underbrace{(\cos\theta_0\cos\theta + \mathrm{sen}\theta_0\,\mathrm{sen}\theta)}_{=\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{\eta} + \frac{e}{\eta}\cos(\theta-\theta_0) = u(\theta)$$

cioè $$r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

Dal sistema lineare:

$$u' = \frac{e}{\eta}(\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta_0 - \mathrm{sen}\theta\cos\theta_0) = -\frac{e}{\eta}\mathrm{sen}(\theta-\theta_0)$$

che è proprio $\dfrac{d}{d\theta}u(\theta)$

$\bar{P} \longleftrightarrow$ traslazioni

$\bar{M} \longleftrightarrow$ rotazioni in 3d

$\bar{A} \longleftrightarrow$?

$$\left.\begin{array}{l} SO(3) \xrightarrow{} \text{3 parametri di continui} \\ \\ \end{array}\right\} \leftrightarrow SO(4) \to \text{6 parametri di continui}$$

Simmetria di L $\to$ $SO(3)$ $\qquad\qquad$ $SO(4)$ $\leftarrow$ Simmetria di L

3 parametri α continui $\xrightarrow{\text{Teorema Nöther}}$ 3 costanti del moto (M_x, M_y, M_z)

6 parametri α continui $\xrightarrow{\text{Teorema Nöther}}$ 6 costanti del moto $(M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z)$

[$SO(d)$: rotaz. in $\mathbb{R}^d$ $\to$ parametrizzate dalle rotazioni su piani indipendenti

$SO(2)$: rotaz. in $\mathbb{R}^2$ $\to$ In $\mathbb{R}^2$ ho $\binom{2}{2} = 1$ piano indip. (1 angolo)

$SO(3)$: rotaz. in $\mathbb{R}^3$ $\to$ In $\mathbb{R}^3$ ho $\binom{3}{2} = 3$ piani indip. (3 angoli)

$SO(4)$: rotaz. in $\mathbb{R}^4$ $\to$ In $\mathbb{R}^4$ ho $\binom{4}{2} = 6$ piani indip. (6 angoli)]