

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 29 APRILE 2020

- PRIMA PARTE

Sistemi dinamici lineari

$$\dot{x} = f(x)$$

$$A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

il sistema dinamico assume la forma

$$\dot{x} = Ax$$

→ autovalori & autovettori

• Autovalori reali & distinti

$$A \rightarrow P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
$$y = \begin{pmatrix} a_1 e^{\tau \lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{\tau \lambda_n} \end{pmatrix} \quad x(\tau) = Py(\tau)$$

• Autovalori complessi & distinti

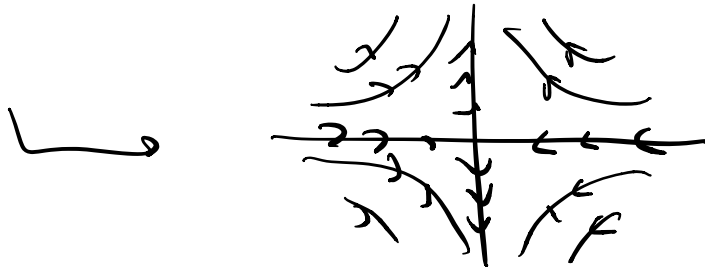
$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \sin, \cos$$

A autovalores distintos: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

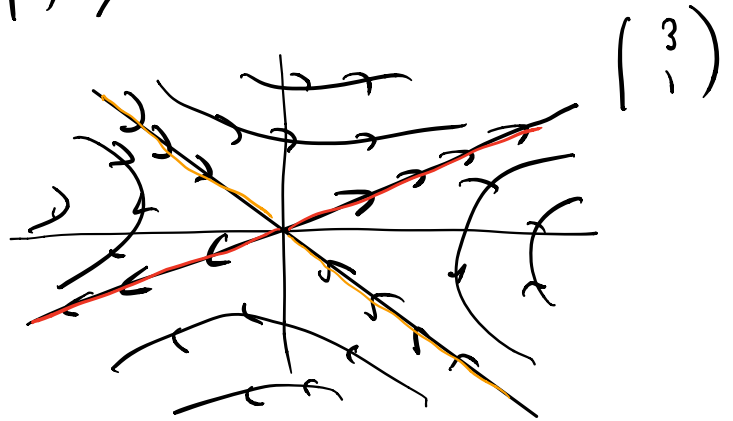
↳ sistemas planos \mathbb{R}^2

Ad es:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & -1 \end{pmatrix}$$



1º plano fixo-determinante

Prendiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

L'equazione caratteristica è:
 $\det(A - \lambda I)$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr} A} \lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{\det A} = 0$$

$$\text{tr} A = \lambda_+ + \lambda_- = \tau$$

$$\det A = \lambda_+ \lambda_- = \delta$$

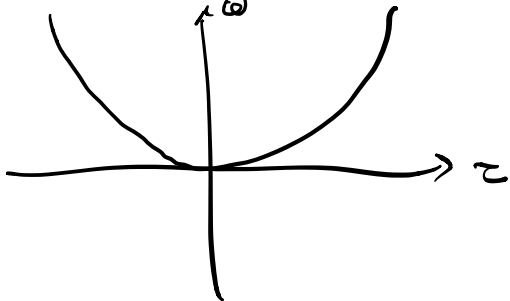
L'eq. caratteristica $\lambda^2 - \tau \lambda + \delta = 0$

ha soluzioni

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta} \right)$$

Idea: classifichiamo i sistemi planari

mettendoli nel piano (τ, δ)



Parabola di eq.

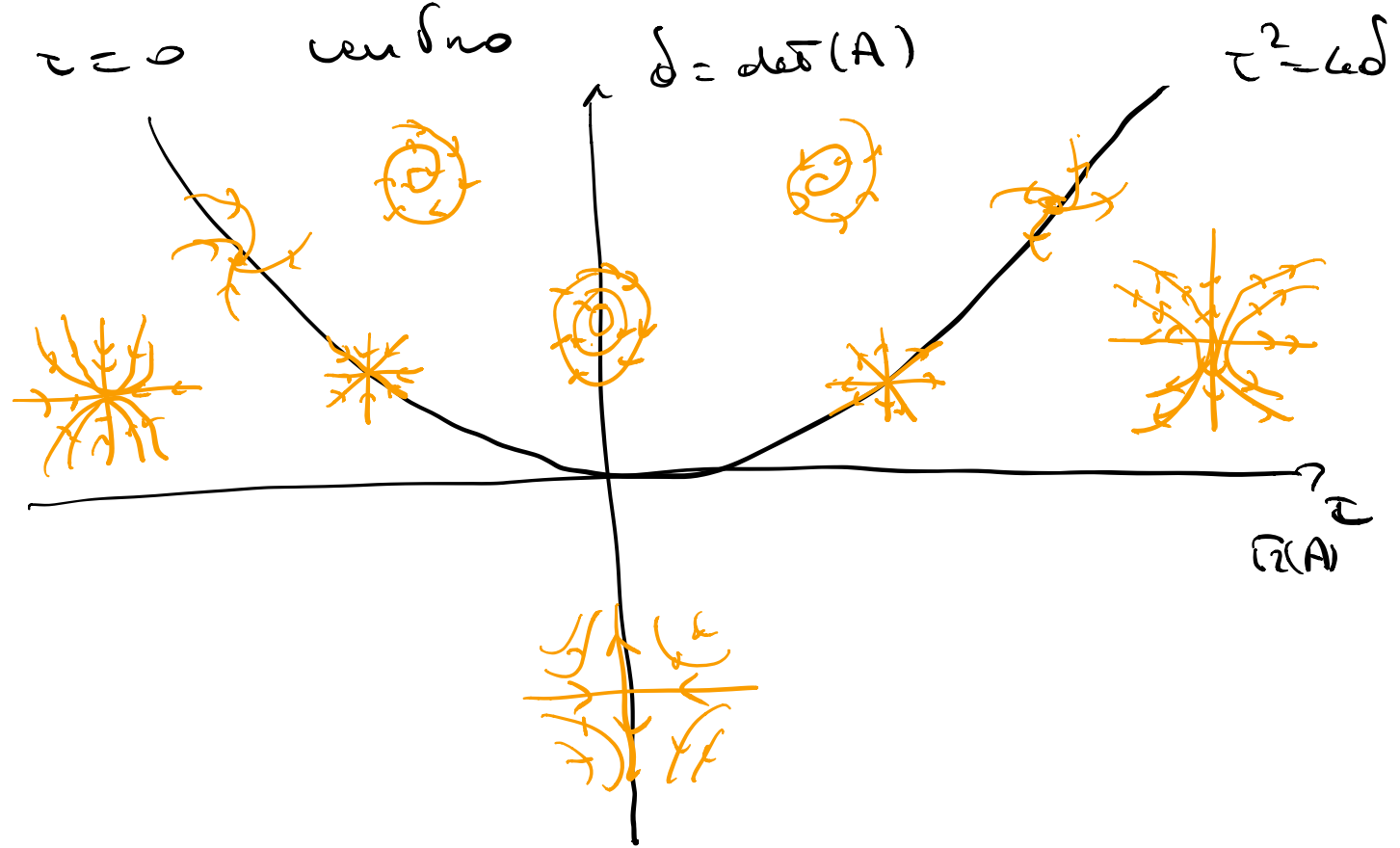
$$\tau^2 - 4\delta = 0$$

- 1) $\tau^2 - 4\delta < 0 \rightarrow$ autovalori complessi
con $\text{im} \neq 0$
- 2) $\tau^2 - 4\delta = 0 \rightarrow$ autovalori ripetuti
- 3) $\tau^2 - 4\delta > 0 \rightarrow$ reali & distinti

Nel caso 1) $(\tau^2 - 4\delta < 0)$, parte reale

degli autovalori è $\frac{\tau}{2}$

$\tau < 0$ polo spirale
 $\tau > 0$ sorgente spirale
 $\tau = 0$ centro



$\tau^2 = 4d$
 $\tau^2 - 4d > 0$ → radice reale : autovalori reali
 $d < 0 \Rightarrow \lambda_+ \lambda_- < 0$
 $d > 0$ e $\tau < 0$
 $d > 0$ e $\tau > 0$ → sorgente
 $\tau + \sqrt{\tau^2 - 4d} > 0$
 $\tau - \sqrt{\tau^2 - 4d} < 0$
 Pozzo
 $\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4d} < 0$

Esempio

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X \quad X \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \left[(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 \right] = \\ &= (1-\lambda) \left[\underbrace{-6 + 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4}_{-2 - \lambda + \lambda^2} \right] = \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1) \end{aligned}$$

Autovettori

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Troviamo che $\lambda = 2$ $\lambda = 1$ $\lambda = -1$

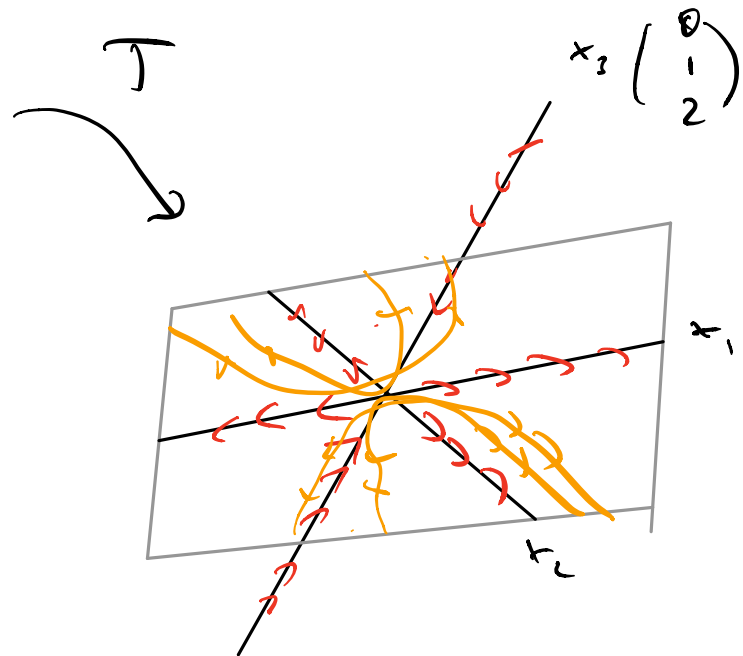
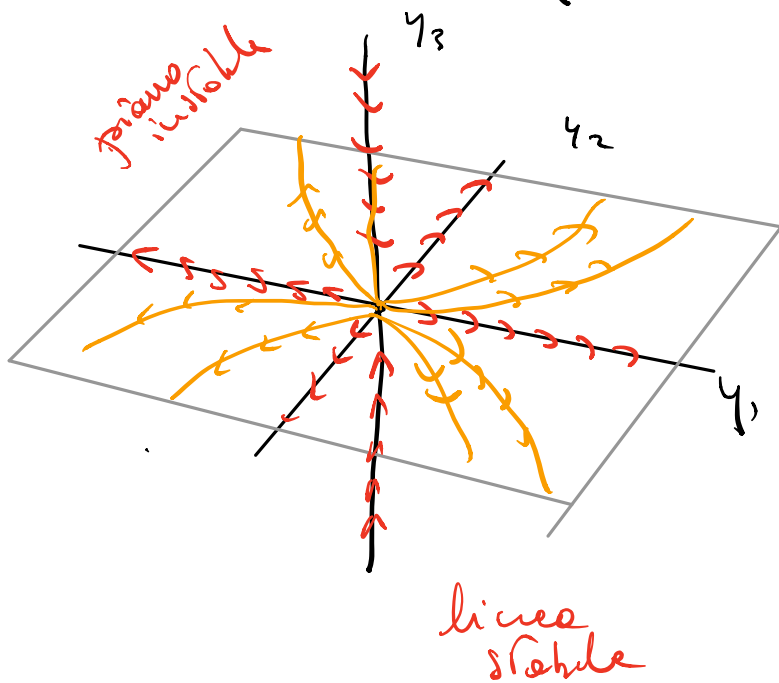
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ conviene

$$\begin{aligned} X' &= AX \Rightarrow Y' = (T^{-1}AT)Y = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y \end{aligned}$$

$$X(t) = T Y(t) =$$

$$= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 29 APRILE 2020

- SECONDA PARTE

Oscillazioni armoniche disaccoppiate

Consideriamo

$$\begin{cases} x_1'' = -\omega_1^2 x_1 \\ x_2'' = -\omega_2^2 x_2 \end{cases}$$

Introduciamo $y_i = x_i'$ $i=1,2$

e trasformiamo il sistema

$$\begin{cases} x_j' = y_j \\ y_j' = -\omega_j^2 x_j \end{cases} \quad j=1,2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

Autovettori $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$

Autovettori

$$i\omega_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1, \quad i\omega_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i\omega_2 \end{pmatrix} = V_2$$

Potenziali $w_1 = \operatorname{Re} V_1, w_2 = \operatorname{Im} V_1$
 $w_3 = \operatorname{Re} V_2, w_4 = \operatorname{Im} V_2$

Pseudomodi T tale che $T e_j = w_j$

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ y_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega_1 \tau + b_1 \sin \omega_1 \tau \\ -a_1 \sin \omega_1 \tau + b_1 \cos \omega_1 \tau \\ a_2 \cos \omega_2 \tau + b_2 \sin \omega_2 \tau \\ -a_2 \sin \omega_2 \tau + b_2 \cos \omega_2 \tau \end{pmatrix}$$

Consideriamo $(x_i(\tau), y_i(\tau)) \quad i=1,2$

è periodica, di periodo $\frac{2\pi}{\omega_i}$

Questo può succedere che la soluzione complessa sia periodica: questo avviene

se $\exists m, n$ interi con $\omega_1 \tau = m 2\pi$, e

$$\omega_2 \tau = n 2\pi$$

la soluzione è periodica se

$$\tau = \frac{2\pi m}{\omega_1} = \frac{2\pi n}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m}$$

→ il rapporto fra le due frequenze è

un numero razionale

Consideriamo il sistema di forme canoniche

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \omega_i y_i \\ \dot{y}_i = -\omega_i x_i \end{cases} \quad i=1,2$$

Riscriviamo il sistema di coordinate polari

$$(x_i, y_i) \mapsto (r_i, \theta_i)$$

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta_i \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$$

deriviamo : $2 r_i \dot{r}_i = 2 x_i \dot{x}_i + 2 y_i \dot{y}_i =$
eq. diff

$$\downarrow \\ = 2 x_i y_i \omega_i - 2 x_i y_i \omega_i = 0$$

quindi $\dot{r}_i = 0 \quad i=1,2$

$\frac{y_i}{x_i} = \tan \theta_i$. Deriviamo questa relazione

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta_i} \dot{\theta}_i &= \frac{y_i \dot{x}_i - \dot{y}_i x_i}{x_i^2} = \\ &= \frac{-\omega_i r_i^2}{r_i^2 \cos^2 \theta_i} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{eq. diff} \end{aligned}$$

Allora in coordinate polari :

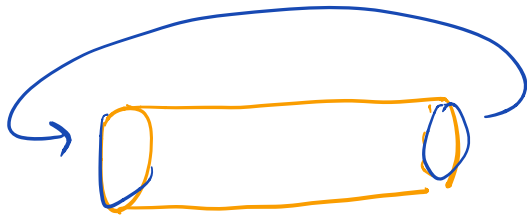
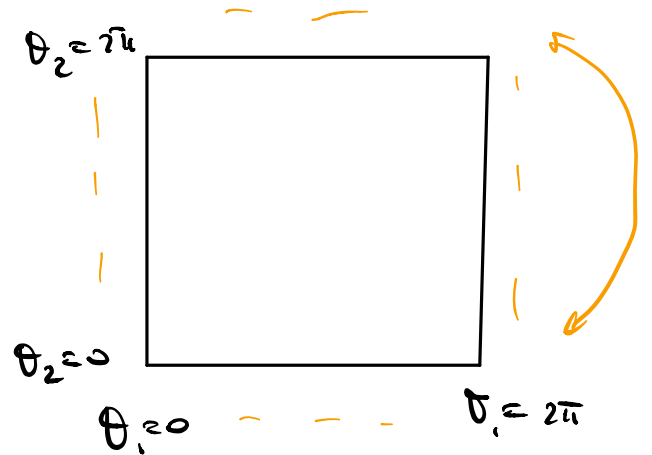
$$\begin{cases} \dot{r}_i = 0 \\ \dot{\theta}_i = -\omega_i \end{cases} \quad i=1,2$$

Vediamo che r_1, r_2 sono costanti lungo

Tutte le soluzioni. Fissiamoli ad esempio
 ad $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. \rightarrow le due variabili
 θ_1, θ_2 sono periodiche
 Γ il luogo di questi punti descritte un
 Toro in \mathbb{R}^4

Rimangano

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\omega_1 \\ \dot{\theta}_2 = -\omega_2 \end{cases}$$



identifichiamo
 i lati opposti

In questo quadrato (con i lati identificati)

il campo vettoriale ha periodo

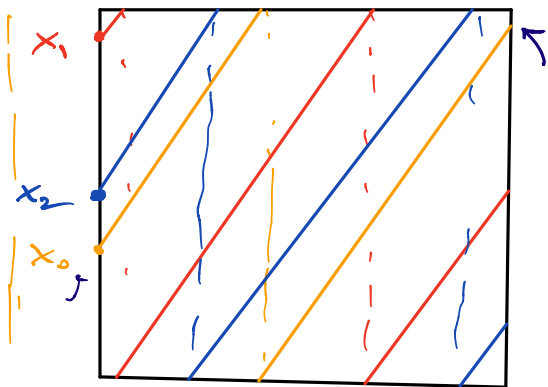
costante:

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Questo significa che quando una sol.
 raggiunge $\theta_1 = 2\pi$ per un certo $\theta_2 = c$

riappare a $\theta_1 = 0$, con lo stesso valore
 $\theta_2 = c$, e la stessa pendenza $\frac{\omega_2}{\omega_1}$
 Lo stesso vale per θ_2

Se $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è un numero razionale $\frac{u}{v}$,
 la soluzione che parte da $(\theta_1(0), \theta_2(0))$
 attraversa gli estremi del quadrato, v
 volte verticalmente e u volte orizzontal-
 mente, prima di tornare al punto di
 partenza
 Nel caso irrazionale, la situazione è
 più interessante



$\theta_1 = 0$

$\theta_1 = 2\pi$

questo definisce
 una "mappa di
 Poincaré"
 Il punto x_1 è detto
 "primo ritorno"

La mappa di Poincaré associa a x_0 ($\rightarrow \theta_1$)
 la coordinata (sul cerchio θ_2) della

Proietto quando ritorno a $\theta_1 = 0$

$$x_0 : f(x_0) = x_1$$

Supponiamo che il primo ritorno avvenga
al punto $\theta_2(\tau)$, dove τ è il tempo
per cui $\theta_1(\tau) = 2\pi$

$$\text{Siccome } \theta_1(\tau) = \theta_1(0) + \omega_1 \tau, \quad \theta_1(0) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_1(\tau) = 2\pi = \omega_1 \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\text{Allora per } \theta_2(\tau) = x_0 + \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right)$$

\uparrow
 $\theta_2(0)$

La mappa di Poincaré sul cerchio
è quindi definita da

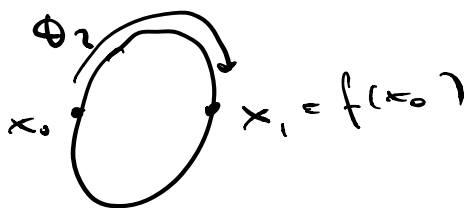
$$f(x_0) = x_0 + 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1} \pmod{2\pi}$$

$$\uparrow$$

$x_0 = \theta_2(0)$

Questa mappa manda i punti del

cerchio θ_2 di un angolo $2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$



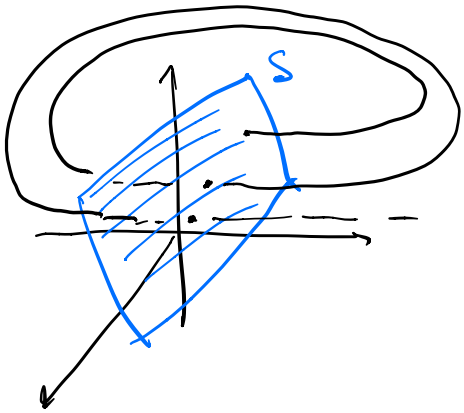
Per $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ irrazionale
"rotazione irrazionale"

Notiamo: abbiamo associato un sistema dinamico discreto ad un sistema dinamico continuo:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)) \dots x_n = f(x_{n-1})$$

è l'orbita di x_0 sotto l'iterazione di

f



$$\dot{x} = g(x) \quad \text{eq. sull' } \mathbb{R}^n$$

→ sistema dinamico discreto

Risultato Si può dimostrare che l'orbita di x_0 è densa nel cerchio se $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è irrazionale

Per chi si vede HIRSCH SMALÉ
DOLANET ✓