SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 30 APRILE 2020
- PRIMA PARTE

Sistemi dinamici lineari

$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\rightarrow \quad A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$

$\boxed{\dot{x} = A x} \quad \rightsquigarrow \quad A$ autovalori & autovettori

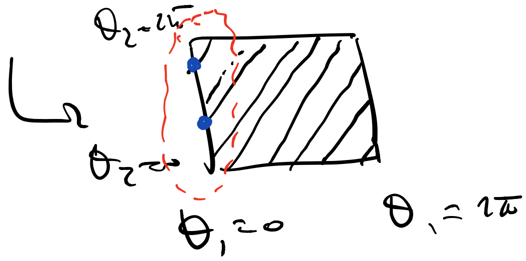
$\rightarrow$ autovalori distinti (reali o complessi)

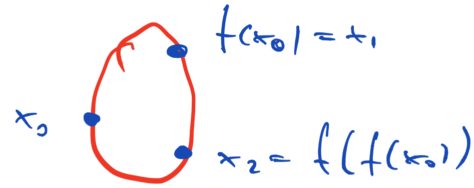
$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_\ell \end{pmatrix}$$

Ritratto di fase

Classificazione dei sistemi planari

Oscillatori armonici disaccoppiati





mappa di Poincaré

Esponenziale di una matrice

→ approccio alternativo per risolvere i sistemi lineari

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore lineare

$T : E \longrightarrow E \quad (E \subset \mathbb{R}^n)$

$x \in E$, $|x|$ è la sua norma

Def Definiamo la norma per T

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$

"norma uniforme"

Un operatore è limitato se $\|T\| < \infty$

Più semplice rappresentare T con una matrice

A : $|T(x)|^2 = x^T A^T A x = x^T S x \geq 0$

$S = A^T A$ è simmetrica → diagonalizzata da una trasformazione ortogonale : $O^{-1} = O^T$

$S = O^T \Lambda O$, usiamo che S è def +

$\Lambda = \mathrm{diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2)$

Gli elementi: $r_i \equiv$ la radice quadrata non-negativa

$\rightarrow$ sono "valori singolari" di T.

Poniamo $x = O^T y$

$\rightarrow |T(x)|^2 = x^T S x = (O^T y) S (O^T y)$

$= y^T O O^T \Lambda O O^T y = y^T \Lambda y$

$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 y_i^2$

Siccome O è ortogonale: $|x| = 1 \Rightarrow |y| = 1$

da cui $|T(x)| = \sqrt{\sum r_i^2 y_i^2}$

intese con $|y| = 1$

$\rightarrow \|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$

$\rightarrow$ si può dire che il max si ottiene

quando $y = e_n$ ($\{e_i\}$ base di $\mathbb{R}^n$)

dove r_n è il valore singolare più grande.

Cioè $\|T\| = \max_{i=1,\dots,n} r_i < \infty$

$\rightarrow$ limitato

L'esponenziale di un operatore è definito formalmente da

$$e^T = \exp T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

$\rightarrow$ definisce un operatore lineare, se converge. Questo avviene se T è limitato:

<u>Teorema</u> la serie $\sum_k \frac{T^k}{k!}$ è assolutamente convergente per ogni operatore limitato T.

<u>Dim</u> Si vede che se T è limitato, allora T^k è limitato

Poniamo $\|T\| = \alpha > 0$: segue dalle proprietà della norma $\left\|\frac{T^k}{k!}\right\| \leq \frac{\alpha^k}{k!}$

quindi la serie reale $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$ (converge a e^{α}) limite $\exp T$, che converge assolutamente. $\blacksquare$

Quindi T definisce un operatore e^T

<u>Alcune proprietà</u>:

1. $$\exp(PTP^{-1}) = P \exp T \, P^{-1}$$

Infatti: $$(PTP^{-1})^k = \underbrace{PT\cancel{P^{-1}}\cancel{P}T\cancel{P^{-1}}\cdots}_{k \text{ volte}}$$

$$= PT^kP^{-1}$$

$$P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(PTP^{-1})^k}{k!}$$

segue per $n \to \infty$

2. $$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Siccome $AB = BA$ possiamo usare il Teorema binomiale

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

quindi:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ k\le n}}^{\infty} \frac{1}{k!\,(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$l = n-k$

$k \le n \quad \underbrace{n-k}_{l} \ge 0$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{l!} B^l$$

$$= e^A e^B$$

3. $AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

$$\Rightarrow e^{-A} = (e^A)^{-1}$$

(ponendo $B = -A$)

$$1 = e^A e^{-A} \Rightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

4. $Tv = \lambda v \Rightarrow e^T v = e^\lambda v$

λ reale

$$e^T v = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!} v \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} v \right) = e^\lambda v$$

5. Similmente $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda_n)$

$$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k - \lambda_n^k)$$

$\rightarrow \quad \exp \Lambda = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} \right)$

Commento Se $[A, B] = AB - BA \neq 0$

Formula di Baker - Campbell - Hausdorff

$$e^A e^B = e^C$$

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + $$

$$- \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \cdots$$

SISTEMI DINAMICI

- LEZIONE DEL 30 APRILE 2020

- SECONDA PARTE

Teorema: Sia $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. Allora il problema ai dati iniziali $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) ha l'unica soluzione

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Dim:
$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h}$$

$$= e^{tA} \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right)$$

$$= e^{tA} A \qquad \left(\text{espandendo } e^{hA} \right)$$

$$e^{hA} = 1 + hA + O(h^2)$$

quindi
$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}x_0\right) = A \underbrace{e^{tA}x_0}_{x} = Ax$$

Dimostriamo l'unicità.

Supponiamo $y(t)$ soluzione

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}y(t)\right) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t)$$

$\dot{y} = Ay$

$$= \left(-Ae^{-tA} + e^{-tA}A\right)y(t) = 0$$

A e e^{tA} commutano

abbiamo dimostrato

$$e^{-tA}y(t) = \text{costante} = y_0$$

$$e^{+tA}e^{-tA}y(t) = e^{tA}y_0$$

Allora $y(T) = e^{TA} y_0$ e imponendo le condizioni iniziali: $y_0 = x_0$

$$y(T) = e^{TA} x_0 = x(T)$$

Per risolvere $\dot{x} = Ax$ dobbiamo imparare a calcolare l'exp di A

Assumiamo A abbia autovalori distinti

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_m \end{pmatrix}$$

dove $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Possiamo riscriverla come la somma di matrici con

o un solo λ_i sulla diagonale, o un solo blocco B_i sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \ 0 \\ \vdots & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \ 0 \\ \hline 0 & 0_{2\times 2} \\ \vdots & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \ 0 \\ \hline 0 & D \\ \vdots & \end{array}\right) \ldots$$

→ queste matrici "elementari" commutano tra di loro

Sappiamo prendere l'esponenziale

Sapendo che $P^{-1}AP = (\quad)$

$e^{TA} =$ $\Rightarrow A = P(\quad)P^{-1}$

usando $\exp(PTP^{-1}) = P \exp T \, P^{-1}$

si trova

$$\boxed{e^{TA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & & & \\ & \ddots \, e^{\lambda_k T} & & \\ & & e^{TD_1} & \\ & & & \ddots \, e^{TD_m} \end{pmatrix} P^{-1}}$$

dobbiamo ancora imparare a calcolare e^{TD}

Scriviamo: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \, \mathrm{id}_{2\times 2} + \beta \sigma$

$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathrm{id}, \sigma] = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vediamo esplicitamente:

$$\sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = - id$$

$$\sigma^3 = \sigma(\sigma \cdot \sigma) = \sigma(-id) = -\sigma$$

$$\sigma^4 = \sigma(-\sigma) = -(-id) = id$$

$$e^{t\sigma} = id \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} + \sigma \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

per finire

$$e^{tD} = e^{t\alpha\, id} \, e^{t\beta\sigma} =$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

L'ultimo caso

$\rightarrow$ caso degli autovalori ripetuti

<u>Stabilità per sistemi lineari</u>

$\rightarrow$ andamento delle soluzioni per $t \to \infty$

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

Def Sistema dinamico lineare, si dice "spettralmente" stabile, se nessuno dei suoi autovalori ha parte reale positiva

$T : E \to E$, $v_i = u_i + i w_i$

$E = E^u \oplus E^c \oplus E^s$

- $E^u = \mathrm{Span}\{u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) > 0\}$ sottospazio instabile
- $E^c = \mathrm{Span}\{u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) = 0\}$ sottospazio centrale
- $E^s = \mathrm{Span}\{u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) < 0\}$ sottospazio stabile

Def: Un sistema dinamico lineare si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$

Sistemi iperbolici sono "generici"

Def Un sistema dinamico lineare si dice linearmente stabile, se tutte le soluzioni sono limitate per $t \to +\infty$

$x_0 \in E^s \rightarrow$ tutte le sol sono limitate

$x_0 \in E^u \rightarrow$ no

$x_0 \in E^c \rightarrow$? possono esserci termini lineari

$$(c_1 + t c_2) e^{\alpha t} \; ---$$

Def Un sistema dinamico lineare si dice asintoticamente linearmente stabile, se tutte le soluzioni vanno a 0 per $t \to \infty$ (cioè $E = E^s$)

Teorema: Abbiamo che $\lim_{t \to \infty} e^{tA} x_0 = 0$ $\forall x_0 \iff$ tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa

Dim (Sketch)

Se tutti autoval. hanno parte reale negativa $\Rightarrow x_0 \in E^s$ e tutti i termini della sol vanno come $t^k e^{t a_j} e^{i b_j t}$

$$\lambda_j = a_j + i b_j$$

$\rightarrow$ vanno a zero per $t \to \infty$, se $a_i < 0$

Viceversa,

- se abbiamo autovalore con parte reale positiva, prendiamo $x_0 \in E^u$, associato a quell'autovalore $\rightarrow$ troviamo sol che cresce exp

- $\operatorname{Re} \lambda = 0 \rightarrow t^k e^{i b_j t}$ che $\not\to 0$ per $t \to +\infty$

$$(c_1 + c_2 t + c_3 t^k) e^{a t}$$