METODI PER REGOLARIZZARE DIVERGENZE UV

Ci sono diversi metodi per regolare divergenze UV.
È importante considerare quali sono le simmetrie rotte dal regolatore.

- **CUTOFF**: $|K_E| < \Lambda \Leftarrow \sqrt{(k^0)^2 + \sum_i (k^i)^2} < \Lambda$

  $$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \to \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$ L'integrale sul momento di loop viene limitato a valori più piccoli di una certa scala Λ. Poi si prende il limite $\Lambda \to \infty$.

  \+ è molto intuitivo

  \- Rompe sia simm. di Lorentz (boost) che di gauge.

- **PAULI - VILLARS**

Ad ogni particella di massa m se ne aggiunge una analoga "fantasma" di massa Λ e di statistica opposta $\Rightarrow$ segno opposto nel contributo a un loop.

E.g.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \longrightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} - \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2} \right) = \dots = -\frac{i}{16\pi^2} \log \frac{m^2}{\Lambda^2}$$

+ È una chiara deformazione della teoria nell'ultravioletto
- Richiede di aggiungere tante particelle in diagrammi a molti loop
- Un termine di massa per un vettore rompe la simmetria di gauge

• REGOLARIZZAZIONE DIMENSIONALE (dim-reg) [S.B.3]

È il metodo di gran lunga più utilizzato, introdotto da 't Hooft e Veltman nel 1972.

Generalizziamo il numero di dimensioni dello spaziotempo da $4 \Rightarrow d \in \mathbb{C}$ continuazione analitica

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^2} \Rightarrow \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^2} \overset{UV}{\rightsquigarrow} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{k^4}$$

diverge solo per $d \geq 4$.

Prendiamo quindi $d = 4 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

Tutti gli integrali di loop diventano finiti, la divergenza corrisponde ad un polo $1/\varepsilon$ per $\varepsilon \to 0$.

+ Preserva tutte le simmetrie della teoria,
+ Applicabile a calcoli multi-loop,
- Meno intuitivo degli altri metodi.

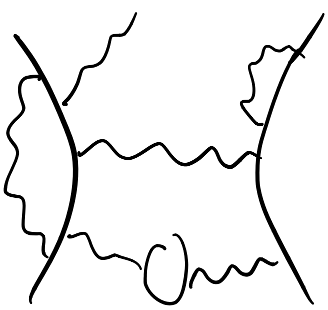
CONTEGGIO DELLE DIVERGENZE ULTRAVIOLETTE

[PS. 10.1, S.21]

Vogliamo capire quali diagrammi di Feynman sono divergenti e quali no.
Cominciamo considerando la QED.
Un diagramma qualsiasi sarà caratterizzato da

- N_e - elettroni esterni
- N_γ - fotoni esterni
- $P_{e,\gamma}$ - propagatori fermionici / fotonici
- V - numero di vertici
- L - numero di loop

Un diagramma qualsiasi avrà:



$$\sim \int \frac{d^4k_1 \dots d^4k_L}{(\not{k}_i - m) \dots k_j^2 \dots k_n^2}$$

Ogni loop porta un $\int d^4k \sim k^4$ come divergenza UV

Ogni propagatore fermionico $\sim \frac{1}{\not{k}}$

" fotonico $\sim \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$ Il diagramma diverge se, mettendo tutto insieme, il diagramma va con una potenza non-negativa di k.

Definiamo il **GRADO DI DIVERGENZA SUPERFICIALE**

$$D = (\text{potenze di } k \text{ al numeratore}) - (\text{potenze di } k \text{ al denominatore}) =$$

$$= 4L - P_e - 2P_\gamma$$

<u>Naivamente:</u>

$\Rightarrow$ Il diagramma diverge come Λ^D $\quad \Lambda$: cutoff

Nota che Λ^0 corrisponde a $\log \Lambda$ $\quad \left(\int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \sim \log \Lambda \right)$

Il diagramma è finito se $D < 0$.

In realtà, i diagrammi a livello albero hanno $D = 0$ ma sono finiti,

alcuni diagrammi possono avere un sotto-diagramma divergente anche se il diagramma complessivo ha $D < 0$.

Possiamo però ridurci a diagrammi con le linee esterne amputate, e di tipo 1PI (irriducibili a 1 particella), dato che tutti i diagrammi connessi sono formati da un albero di diagrammi 1PI.

Notiamo che $L = P_e + P_\gamma - V + 1$

$\Rightarrow$ Ogni propagatore ha un $\int d^4k$, ogni vertice una $\delta^4(\ )$ ed una $\delta^4(\ )$ è la conservazione del momento globale.

Inoltre: $V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e)$

dato che i vertici sono e propagatori sono collegati a 2 vertici.

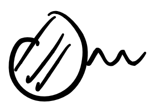
$$\Rightarrow D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma =$$

$$\boxed{D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} N_e}$$

Un numero limitato di diagrammi ha $D \geq 0$:

$D = 4$

Diag. vuoto-vuoto
Si cancella in $Z[0]$



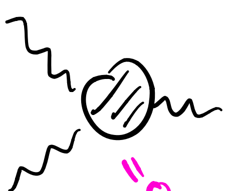
$D = 3$

$= 0$ per Lorentz

$D = 2$

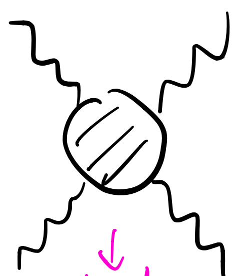
$\rightarrow (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\log\Lambda$

Sono divergenti logaritmicamente



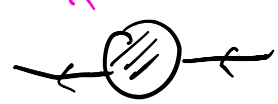
$D = 1$

$= 0$
Teorema di Furry
(per coniugazione di carica)



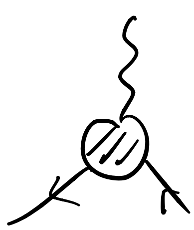
$D = 0$

la parte div. è nulla
per id. di Ward



$D = 1$

$\sim A \not{p} \log\Lambda + B m \log\Lambda$



$D = 0$ $\sim \log\Lambda$

Date le simmetrie della QCD, solamente 3 hanno divergenze rilevanti alla fenomenologia, e sono divergenze logaritmiche, mentre un quarto diagramma divergente è l'energia del vuoto.

$\Rightarrow$ Una volta regolarizzati queste poche ampiezze, tutte le altre daranno risultati FINITI.
Nota che il nr. di diagrammi divergenti è molto più alto e aumenta ad ogni ordine in th. delle perturbazioni.

POSSIAMO CLASSIFICARE LE TEORIE IN:

- TEORIE SUPER-RINORMALIZZABILI
  Un numero finito di diagrammi di Feynman è divergente.

- TEORIE RINORMALIZZABILI
  Un numero finito di ampiezze sono superficialmente divergenti

- TEORIE NON-RINORMALIZZABILI
  Tutte le ampiezze sono divergenti se andiamo ad un ordine sufficientemente alto in teoria delle perturbazioni.

Consideriamo la teoria di uno scalare in d dimensioni dello spazio tempo, con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{g}{n!}\varphi^n$$

L: # loop
P: # propagatori
V: # vertici
N: # gambe esterne

$$\begin{cases} L = P - V + 1 \\ nV = N + 2P \end{cases}$$

$$D = dL - 2P = d + \left[n\left(\frac{d-2}{2}\right) - d\right]V - \left(\frac{d-2}{2}\right)N$$

- $d=4$ e $n=4$: $D = 4 - N$ rinormalizzabile
- $d=4$ e $n=6$: $D = 4 - N + 2V$ non-rinormalizzabile
- $d=4$ e $n>4$: non-rinormalizzabile
- $d=3$ e $n=6$: $D = 3 - \frac{N}{2}$ rinormalizzabile
- $d=3$ e $n=4$: $D = 3 - \frac{N}{2} - V$ super-rinormalizzabile

$\Rightarrow$ Per essere rinormalizzabile è necessario che

$$\boxed{n\left(\frac{d-2}{2}\right) - d \leq 0}$$

Questo corrisponde alla richiesta che l'accoppiamento g abbia dimensioni in energia E^{Δ} con $\Delta \geq 0$.

SCALING CON L'ENERGIA

Dato un termine X che scala come E^{Δ}

definiamo: $[X] \equiv \Delta$

l'azione è adimensionale (scala come $\hbar$): $[S]=0$.

Dato $[d^dx]=-d$ e $S=\int d^dx\, \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $[\mathcal{L}]=d$.

Dal termine cinetico:

$$\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2\right]=2+2[\varphi]\equiv d \rightarrow [\varphi]=\frac{d-2}{2} \qquad [\varphi]=1 \text{ in } d=4$$

Prendiamo l'interazione:

$$[\lambda\varphi^n]=[\lambda]+n[\varphi]=[\lambda]+\frac{n(d-2)}{2}\equiv d$$

$$[\lambda]=d-n\left(\frac{d-2}{2}\right)$$

Quindi λ è adimensionale per $d=4$ e $n=4$

Il grado di divergenza superficiale è quindi

$$D=d-[\lambda]V-\left(\frac{d-2}{2}\right)N$$

$\Rightarrow$ La teoria è rinormalizzabile per $[\lambda]\geq 0$

Questo è generalizzabile per particelle ed accoppiamenti qualsiasi. Per $d=4$: [Se.3.4]

N_f : # gambe esterne di un campo di spin s_f

V_i : # vertici con accoppiamento g_i, del tipo

$$\mathcal{L} \supset g_i \, \partial^{d_i} \prod_f \phi_f^{n_{if}}$$

$[g_i] = 4 - d_i - \sum_f n_{if}(s_f+1)$ $\Rightarrow$ dimensione dell'accoppiamento g_i

$$\boxed{D = 4 - \sum_f N_f(s_f+1) - \sum_i V_i [g_i]}$$

- Se tutti i $[g_i] > 0$ $\Rightarrow$ la teoria è SUPER-RINORMALIZZABILE
- Se tutti i $[g_i] \geq 0$ $\Rightarrow$ la teoria è RINORMALIZZABILE
- Se anche un solo $[g_i] < 0$ $\Rightarrow$ NON RINORMALIZZABILE