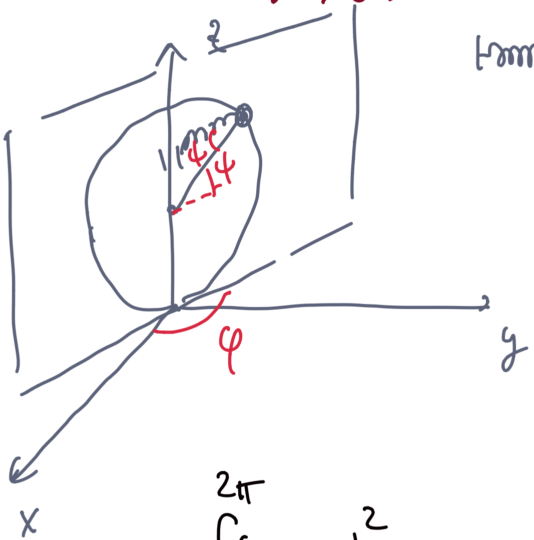
ES. 2 10.09.2019



// piano xy

$\downarrow \vec{g}$

corpo m si muove su una sfera di raggio R con coordinate polari ψ e φ con $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$x = R\cos\psi \cos\varphi$$
$$y = R\cos\psi \,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$z = R + R\,\mathrm{sen}\,\psi$$

1) $$I = \int_0^{2\pi} (R\cos\psi)^2 \rho R\, d\psi = \rho R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cancel{\cos 2\psi}}{2}\, d\psi = \rho R^3 \pi = (2\pi R \rho)\frac{R^2}{2}$$
$$= \frac{MR^2}{2}$$

2) $$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2\psi \right)$$

$$V = mgR\,\mathrm{sen}\,\psi + \frac{k}{2} R^2 \cos^2\psi$$

$$L = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2\psi \right) - mgR\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{k}{2} R^2 \cos^2\psi$$

3) Eq. Lagr.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{d}{dt}\left(mR^2 \dot{\psi} \right) = mR^2 \ddot{\psi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{1}{\cancel{2}} mR^2 \dot{\varphi}^2 \cancel{2} \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi - mgR\cos\psi + \frac{k}{\cancel{2}} R^2 \cancel{2} \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$\ddot{\psi} = -\dot{\varphi}^2 \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{g}{R}\cos\psi + \frac{k}{m}\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} MR^2 \dot{\varphi} + mR^2 \dot{\varphi}\cos^2\psi \right) =$$
$$= \frac{1}{2} MR^2 \ddot{\varphi} + mR^2 \ddot{\varphi}\cos^2\psi - mR^2 \dot{\varphi}\dot{\psi}\, 2\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{M}{2} + m\cos^2\psi \right) - 2m\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi = 0$$

4) φ è coord. ciclico

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi\left(\frac{1}{2}M + m\cos^2\psi\right)R^2$$

$$\to \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{\left(M/2 + m\cos^2\psi\right)R^2}$$

$$L^* = L - \dot\varphi\, p_\varphi \Big|_{\dot\varphi =}$$

$$L = \frac{1}{4}MR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\dot\psi^2 + \dot\varphi^2\cos^2\psi\right) - mgR\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{k}{2}R^2\cos^2\psi$$

$$L^* = \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{p_\varphi}{(M/2 + m\cos^2\psi)R^2}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot\psi^2 + \frac{1}{2}mR^2\cos^2\psi\left(\frac{p_\varphi}{(M/2 + m\cos^2\psi)R^2}\right)^2$$
$$- mgR\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{kR^2}{2}\cos^2\psi - p_\varphi\left(\frac{p_\varphi}{(M/2 + m\cos^2\psi)R^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{R^2}\cancel{(M/2 + m\cos^2\psi)}\frac{p_\varphi^2}{\left[(M/2 + m\cos^2\psi)R^2\right]^{\cancel{2}}}}\ \underbrace{- \frac{p_\varphi^2}{R^2(M/2 + m\cos^2\psi)}}$$
$$+ \frac{1}{2}mR^2\dot\psi^2 - mgR\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{kR^2}{2}\cos^2\psi$$

$$L^* = \frac{1}{2}mR^2\dot\psi^2 - \frac{p_\varphi^2}{2R^2(M/2 + m\cos^2\psi)} - mgR\,\mathrm{sen}\,\psi - \frac{kR^2}{2}\cos^2\psi$$

5) Trovare 2 cost. del moto:

1) φ coord ciclico $\Longrightarrow$ $\underbrace{R^2\dot\varphi\left(\frac{M}{2} + m\cos^2\psi\right)}_{= M_z^{tot}}$ "p_φ" è cost. del moto

$$\underbrace{R^2\dot\varphi\,\frac{M}{2}}_{I\dot\varphi}$$

2) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \left(\frac{\partial L^*}{\partial t} = 0\right) \quad \Rightarrow$ Energia è una cost. del moto

$$E = T + V \, .$$

6) Si considerano dati iniziali t.c. $\dot{\varphi}(t=0)=0$ (*)

→ si trovano i pti di equil. del sist. ridotto e se ne discute la stabilità

Sist. ridotto dipende dal parametro p_φ. (*) serve per restringere lo studio del sist. ridotto solo a particolari valori del parametro p_φ t.c. $\dot{\varphi}(0)=0$.

$$p_\varphi = R^2\dot{\varphi}\left(M/2 + m\cos^2\psi\right)$$

$$\longrightarrow \underset{\text{cost.}}{p_\varphi} = R^2\dot{\varphi}(t)\left(\frac{M}{2}+m\cos^2\psi(t)\right) \quad \forall t$$

↓ è vero $\forall t$, e quindi anche per $t=0$ →

→ a $t=0$ $\quad p_\varphi=0 \quad (\Rightarrow p_\varphi=0 \ \forall t)$.

Studiamo sist. ridotto con $p_\varphi=0$. In questo caso:

$$L^* = \underbrace{\frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}^2}_{T} \underbrace{- mgR\sin\psi - \frac{kR^2}{2}\cos^2\psi}_{-V_{eff}}$$

$$V_{eff}(\psi) = mgR\sin\psi + \frac{kR^2}{2}\cos^2\psi$$

Pti eq. sono zeri di V'_{eff}

$$0 = V'_{eff}(\psi) = mgR\cos\psi - \overbrace{kR^2\cos\psi\sin\psi}^{\frac{kR^2}{2}\sin 2\psi} = kR^2\cos\psi\left(\frac{mg}{kR}-\sin\psi\right)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \cos\psi=0 \longleftrightarrow \psi=\pm\pi/2 & \leftarrow \text{esistono sempre} \\ \sin\psi=\frac{mg}{kR} \longleftrightarrow \psi=\psi_3,\psi_4 & \leftarrow \text{esistono SOLO SE } \frac{mg}{kR}\leq 1 \end{cases}$$

$$V''_{eff}(\psi) = -mgR\sin\psi - kR^2\cos 2\psi = -mgR\sin\psi + kR^2\left(2\sin^2\psi-1\right)$$

$$V''_{eff}(-\pi/2) = mgR + KR^2 \rightarrow \text{STABILE}$$

$$V''_{eff}(\pi/2) = -mgR + KR^2 = KR^2\left(1 - \frac{mg}{KR}\right) \begin{cases} \nearrow \text{STABILE} & \frac{mg}{KR} < 1 \\ \searrow \text{INSTAB} & \frac{mg}{KR} > 1 \end{cases}$$

$$V''_{eff}(\varphi_{3,4}) = -mgR\left(\frac{mg}{KR}\right) + KR^2\left(2\left(\frac{mg}{KR}\right)^2 - 1\right) =$$

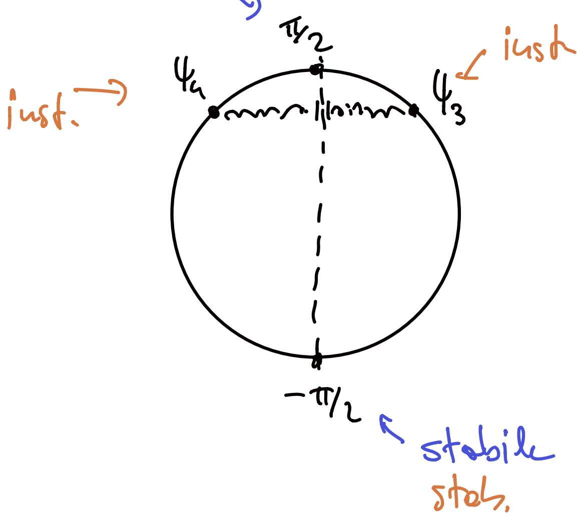
$$= -\frac{R(mg)^2}{KR} + \frac{2R(mg)^2}{KR} - KR^2 = R\left\{\frac{(mg)^2 - (KR)^2}{(KR)}\right\}$$

stab

instab

$$= \frac{1}{K}(mg + KR)(mg - KR) < 0 \rightarrow \text{INSTABILI}$$

quando i phi di eq. $\varphi_{3,4}$ esistono



$$\frac{mg}{KR} > 1$$

$$\frac{mg}{KR} < 1$$

7) $$\hat{L}^* = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}} \cdot A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2}\bar{q} \cdot B \bar{q}$$

$B = V''_{eff}(-\pi/2) = mgR + KR^2$

$A = a(-\pi/2)$

$$\hat{L}^* = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\, mR^2 \dot{\varphi} - \frac{1}{2}\varphi(mgR + KR^2)\varphi$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}(mgR + KR^2)\varphi$$

$$L^* = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 - mgR\sin\varphi - \frac{KR^2}{2}\cos^2\varphi$$

$a = mR^2$

ottenere $\hat{L}^*$ espandendo termine a termine attorno a $(\varphi, \dot{\varphi}) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ (tenendo solo termini al max quadratici)

$$\cancel{\det}(B - \omega^2 A) = (mgR + KR^2) - \omega^2 mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{g}{R} + \frac{K}{m}\right)}$$

MECCANICA HAMILTONIANA

Eq. di Lagrange sono $\underline{n}$ eq. diff. del 2° ordine.

$$\ddot{\bar q} = \bar f(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

Metodo ordinario per passare a $\underline{2n}$ eq. diff. del 1° ordine è

$$\begin{cases} \dot{\bar q} = \bar\eta \\ \dot{\bar\eta} = \bar f(\bar q, \bar\eta, t) \end{cases}$$

nuove variab. $\eta_h = \dot q_h$

Non sempre è il metodo più conveniente. In particolare, le eq. di Lag. hanno forma particolare:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L(\bar q, \dot{\bar q}, t)}{\partial \dot q_h}}_{} = \frac{\partial L(\bar q, \dot{\bar p}, t)}{\partial q_h}$$

Idea è di def. delle nuove variabili

$$(\star) \qquad p_h = \frac{\partial L(\bar q, \dot{\bar q}, t)}{\partial \dot q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

MOMENTI CONIUGATI

In pte nuove coord., l'eq. di Lag. diventa

$$(\bullet) \qquad \dot p_h = \frac{\partial L(\bar q, \dot{\bar p}, t)}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n$$

Vogliamo invertire $(\star)$ per trovare $\dot q_h = \dot q_h(\bar p, \bar q, t)$.

Possiamo fare l'inversione (cioè camb. di coord. è invertib.) se

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k}\right) \neq 0$$

Per sistemi meccanici naturali $\quad L = T - V \quad$ dove $T = T_2 + T_1 + T_0$

$$\uparrow a \qquad \uparrow b \qquad \uparrow c$$

$$p_h = \sum_{l=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_l}}}{a_{hl}} \dot{q}_l + b_h$$

è invertibile

inversione

$$\dot{\bar{q}} = a^{-1}(\bar{p} - \bar{b})$$

$\rightarrow$ va inserita in $(\bullet)$

per ottenere eq. diff. del tipo

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{f}_q(\bar{p}, \bar{q}, t) \\ \dot{\bar{p}} = \bar{f}_p(\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases} \qquad (\#)$$

Se facciamo questa scelta di nuove coord. (per portare le eq. di Lag. del 2° ord. nelle eq. del 1° ord. $(\#)$), le $\bar{f}_q$ e $\bar{f}_p$ prendono una forma molto particolare.

__Prop__. Si consideri una Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ con det. hessiano non nullo, cioè $\quad \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$.

Allora il sistema

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} & \leftarrow \text{def. delle nuove coord.} \\ \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} & \leftarrow \text{eq. di Lag.} \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_h &= \frac{\partial H}{\partial p_h} \\ & \qquad\qquad h = 1, \dots, n \\ \dot{p}_h &= -\frac{\partial H}{\partial q_h} \end{aligned}}$$

con

$$H(\bar{p}, \bar{q}, t) \equiv \left[\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\right]\Big|_{\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{p}, t)}$$

che risolve $(\divideontimes)$

Inoltre si ha $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

H è detta HAMILTONIANA o funzione di Hamilton. Le eq. $(*)$ sono dette EQ. DI HAMILTON o eq. canoniche.

Dim. Siccome per ipotesi $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \Rightarrow (*)$ si può invertire, ottenendo $\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(\bar{p}, \bar{q}, t) = \left(\sum_h p_h \dot{q}_h - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\right)\Big|_{\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$ è ben definita

$$dH = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} dq_m\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_m \boxed{p_m} d\dot{q}_m + \sum_m \dot{q}_m dp_m - \sum_m \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} d\dot{q}_m - \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

è il differenziale della funzione $\dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$

Noto che il diff. della funct. $\dot{\bar{q}}$ appare in due pti. Siccome $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$, questi contributi si cancellano.

$$= \sum_m \left(\dot{q}_m dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_h}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \dot{p}_h} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

//

Prop. In un sistema meccanico naturale, H ha l'espressione

$$H = T_2 - T_0 + V$$

dove T_2 e T_0 sono i termini dell'en. cin. T, rispettivam. di grado 2 e 0 in $\dot{\bar q}$, riespressi in funz. di $\bar p, \bar q, t$

Nel caso indip. dal temp.

$$H = T + V \qquad \text{(cioè l'energia totale del sistema)}$$

Dim. T_2, T_1, T_0 sono funz. omogenee in $\dot{\bar q}$ di grado $2, 1, 0$.

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \cdot \dot q_h = \sum_h \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_h} \dot q_h + \sum_h \frac{\partial T_1}{\partial \dot q_h} \dot q_h + \sum_h \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_h} \dot q_h =$$

$$= 2T_2 + 1 \cdot T_1 + \cancel{0 \cdot T_0}$$

$$= 2T_2 + T_1$$

$$H = \sum_k p_k \dot q_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \dot q_k - L = \underline{2T_2} + \cancel{T_1} - (\underline{T_2} + \cancel{T_1} + T_0 - V)$$

$$= T_2 - T_0 + V \quad //$$

Se partiamo da sist. Lagr. con $\det \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q_h \partial \dot q_k} \neq 0$ $\longrightarrow$ sist. Ham. equivalente

sist. Lagr. equivalente $\longleftarrow$ se partiamo da sist. Hamilt. con $\det \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_h \partial p_k} \neq 0$

Esistono però sist. Hamiltoniani senza un'equivalente descrizione Lagrangiana e viceversa.

SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI Q con coord. $(q_1, \dots, q_n)$

Formalismo Lagrangiano: Q è completato a uno spazio di dim. doppia, detto

SPAZIO DEGLI STATI $\underbrace{TQ}$ con coord. $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

"FIBRATO TANGENTE"

Formalismo Hamiltoniano: Q è completato a uno spazio di dim. doppia, detto

SPAZIO DELLE FASI $\underbrace{T^*Q}$ con coord. $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

"FIBRATO COTANGENTE"

(Vedi Arnold)

Merc. 6 Aprile → No LEZIONE