ESERCIZI

ES. 2 19.02.2020

$$V = \frac{\alpha}{mR(x,y,z)} - \frac{4\beta}{3mR(x,y,z)^{3/2}}$$

$$R(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\alpha, \beta > 0$

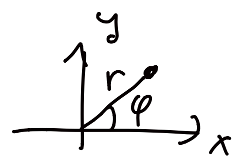
1) Moto avviene su un piano:

R è inv. per rotazioni $\Rightarrow$ V è inv. per rotaz. $\Rightarrow$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ $\Rightarrow$ T è inv. per rotaz.

$\Rightarrow$ $\bar{M}$ è una cost. del moto.

Ed $\bar{M} = \bar{r} \times m\dot{\bar{r}}$ $\leftarrow$ $\bar{M}$ cost. $\Rightarrow$ vett. ortogonale a $\bar{r}$ e $\dot{\bar{r}}$ è cost. $\Rightarrow$ piano $\langle \bar{r}, \dot{\bar{r}} \rangle$ è cost. cioè $\bar{r}$ e $\dot{\bar{r}}$ giacciono sempre nel piano ortogonale a $\bar{M}$.



2) $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$

$R(x,y,z) = R(x,y,0) = \sqrt{x^2+y^2} = r \Rightarrow V = \frac{\alpha}{mr} - \frac{4\beta}{3mr^{3/2}}$

pto si muove nel piano $z=0$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{mr} + \frac{4\beta}{3mr^{3/2}}$$

3) Coord. ciclica: φ

Relativa cost. del moto: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \equiv \ell \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$

Lagr. ridotta: $L^* = L - p_\varphi \dot{\varphi} \Big|_{\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}} =$

$$L^* = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{\ell^2}{(mr^2)^2} - \frac{\alpha}{mr} + \frac{4\beta}{3m r^{3/2}} - \ell\left(\frac{\ell}{mr^2}\right)$$

$$L^* = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{mr} + \frac{4\beta}{3m r^{3/2}} - \frac{\ell^2}{2mr^2} = T_{eff} - V_{eff}$$

4) Pti di equilibrio del problema ridotto e loro stabilità

$$V_{eff} = \frac{\alpha}{mr} - \frac{4\beta}{3m r^{3/2}} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$V'_{eff} = -\frac{\alpha}{mr^2} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\beta}{\cancel{3}m r^{5/2}} - \frac{\cancel{2}\ell^2}{\cancel{2}m r^3} =$$

$$= -\frac{\alpha}{mr^3}\underbrace{\left[r - \frac{2\beta}{\alpha} r^{1/2} + \frac{\ell^2}{\alpha} \right]}_{=0} = 0$$

è un'equazione di secondo grado in $r^{1/2}$

$$r^{1/2}_{1,2} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\ell^2}{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta^2 - \alpha\ell^2}$$

queste soluzioni esistono ($r \in \mathbb{R}$) se $\Delta \geq 0$, cioè se

$$\boxed{\beta^2 \geq \alpha \ell^2}$$

Per studiare la stabilità dovremmo calcolare V''_{eff} e calcolarlo in $r_{1,2}$

$$V''_{eff} = \frac{2\alpha}{mr^3} - \frac{5\beta}{m r^{7/2}} + \frac{3\ell^2}{m r^4} = \frac{2\alpha}{m r^4}\left(r - \frac{5}{2}\frac{\beta}{\alpha} r^{1/2} + \frac{3\ell^2}{\alpha} \right)$$

↳ dovremmo sostituire $r_{1,2}$ in questa espressione e vedere se essa risulta positiva (MIN) o negativa (MAX); ma il conto è complicato ⇒ usiamo un altro metodo per capire se $r_{1,2}$ sono min o max.

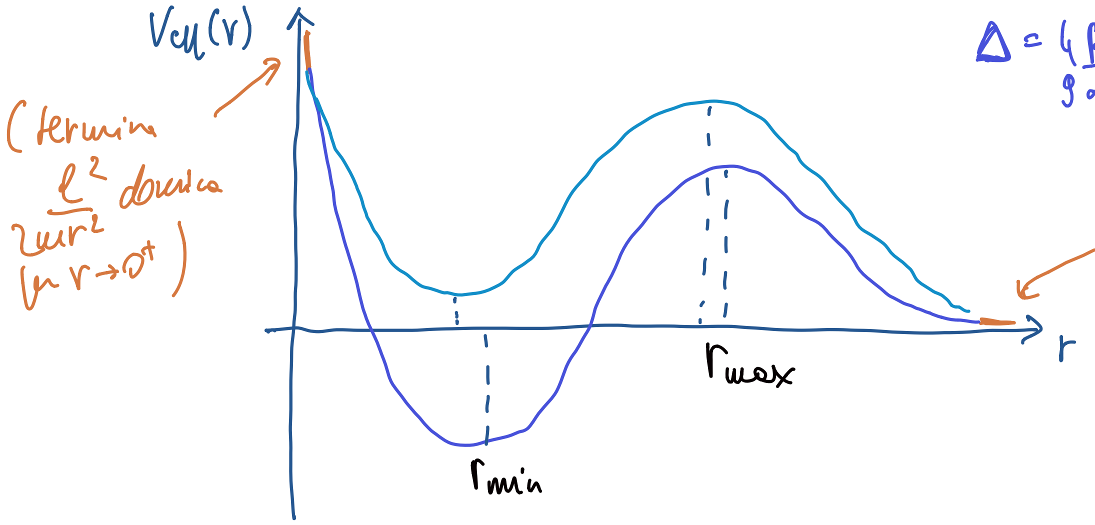
tracciamo grafico del pot. efficace

↳ $V' < 0$ per $r < r_-$ $r > r_+$ decr.
$V' > 0$ per $r_- < r < r_+$ cresc.

↘ r_- ↗ r_+ ↘

$$V_{eff} = \frac{\alpha}{mr} - \frac{4}{3m r^{3/2}} + \frac{\ell^2}{2mr^2} = \frac{\alpha}{mr^2}\left[r - \frac{4\beta}{3\alpha} r^{1/2} + \frac{\ell^2}{2\alpha} \right]$$

$$\Delta = \frac{4\beta^2}{9\alpha^2} - \frac{\ell^2}{2\alpha} = \frac{4}{9\alpha^2}\left(\beta^2 - \frac{9\alpha\ell^2}{8}\right)$$



$\alpha > 0$ (termine $\frac{\alpha}{mr}$ domina per $r \to \infty$ $(\alpha > 0)$)

- Se i pti stazionari (φ) esistono, essi sono due.
- V_{eff} ha due zeri quando i pti staz. esistono.

$\Rightarrow$ Tra $r_{1,2}$, il MIN è il valore minore tra r_1 e r_2

pto eq. stab

$$r^{1/2}_{1,2} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\ell^2}{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha}\underbrace{\sqrt{\beta^2 - \alpha\ell^2}}_{} \geq 0$$

quando esistono i pti staz. questo termine è $\leq \beta$

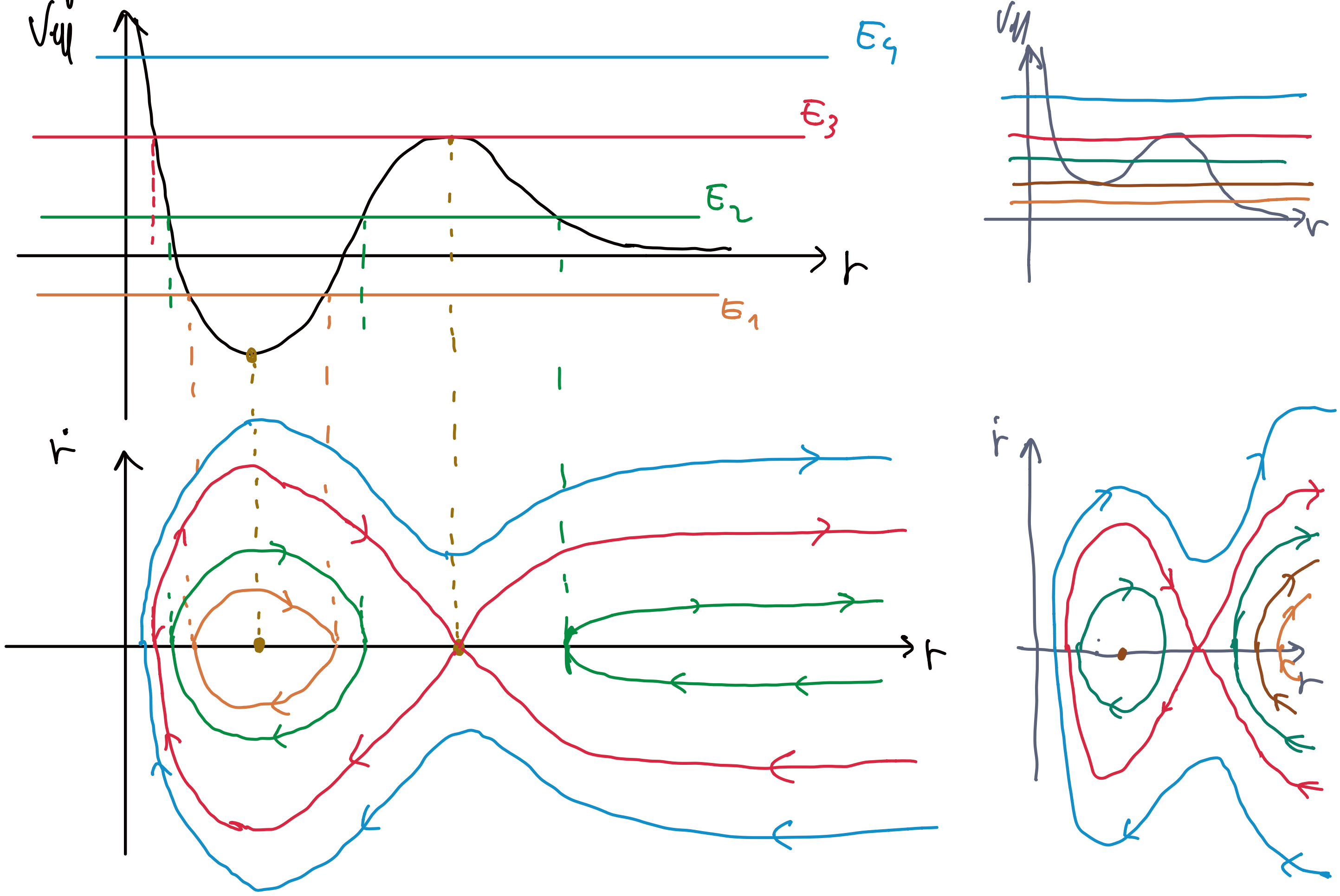
$$r_{MIN} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta^2 - \alpha\ell^2} \qquad \text{STAB}$$

$$r_{MAX} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta^2 - \alpha\ell^2} \qquad \text{INST.}$$

$\to$ r_{MIN} con $\ell > 0$ corrisponde a un'orbita che è una circonferenza $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$

$\to$ r_{MAX} con $\ell > 0$ corrisponde anch'esso a una circonferenza nel piano x,y.

5) Diagramma di fase



6) $\beta = 5 h^{1/2} \alpha$ e $\ell = 3 h^{1/2} \alpha^{1/2}$ (h è una cost.)

$$r_{MIN}^{1/2} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta^2 - \ell^2 \alpha} \qquad \ell^2 = 9h\alpha \quad \beta^2 = 25 h \alpha^2$$

$$= \frac{5h^{1/2}\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{\underbrace{25h\alpha^2 - 9h\alpha^2}_{16\alpha^2 h}} = 5h^{1/2} - \frac{4\alpha}{\alpha} h^{1/2} = h^{1/2}$$

$$V_{eff}'' = \frac{2\alpha}{mr^3} - \frac{5\beta}{mr^{7/2}} + \frac{3\ell^2}{mr^4} = \frac{2\alpha}{mr^4}\left(r - \frac{5}{2}\frac{\beta}{\alpha} r^{1/2} + \frac{3\ell^2}{\alpha} \right)$$

$$V_{eff}''(r) = \frac{2\alpha}{mr^3} - \frac{25h^{1/2}\alpha}{mr^{7/2}} + \frac{27h\alpha}{mr^4} =$$

$$= \frac{\alpha}{mr^3}\left[2 - \frac{25h^{1/2}}{r^{1/2}} + \frac{27h}{r} \right] \qquad r_{MIN} = h$$

$$V_{eff}''(r_{MIN}=h) = \frac{\alpha}{mh^3}\left[2 - 25 + 27 \right] = \frac{4\alpha}{mh^3}$$

$$\hat{L}^{k} = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}} A \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2}\bar{q}\cdot B\,\bar{q}$$

$A = m$

$B = V_{eff}''(r_{min}) = \frac{4\alpha}{mh^3}$

$$0 = \cancel{\det}\,(B - \lambda A) \Rightarrow \lambda = \frac{B}{A}$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{4\alpha}{m^2 h^3} \qquad \omega = \frac{2}{mh}\sqrt{\frac{\alpha}{h}}$$

7)

$$r(t) = r_{min} + L\cos(\omega t + b) \qquad L \ll r_{min}$$

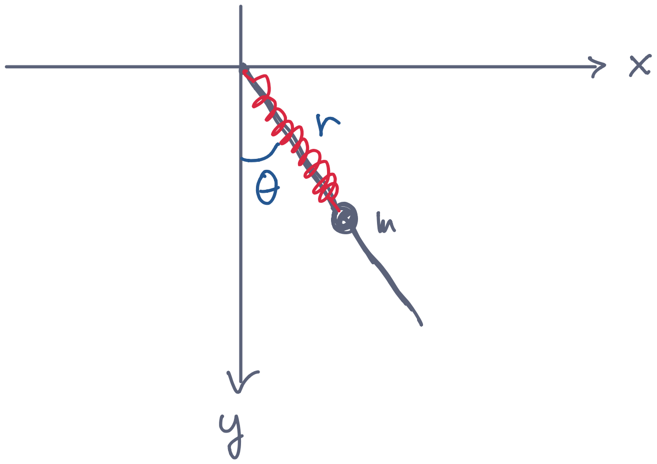
$$\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{\ell}{m(r_{min} + L\cos(\omega t + b))^2} = \frac{\ell}{mr_{min}^2}\underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{L}{r_{min}}\cos(\omega t + b)\right)^2}}_{*}$$

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2} = 1 - 2\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\simeq \frac{\ell}{mr_{min}^2}\left(1 - \frac{2L}{r_{min}}\cos(\omega t + b)\right)$$

$$\rightarrow \varphi(t) \simeq \varphi_0 + \frac{\ell t}{mr_{min}^2} - \frac{2\ell L}{m r_{min}^3\,\omega}\sin(\omega t + b)$$

ESERCIZIO



$\downarrow \bar{g}$

molla di cost. elastica k e lungh. a riposo l_0

Sistema a $\underline{2 \text{ gradi di libertà}}$

$x = r \sin\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

$y = r\cos\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$

1) Scrivere $L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V_{grav.} = -mgy = -mgr\cos\theta$$

$$V_{elast} = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

2) Ci sono coord. CICLICHE ? No : sia r che θ compaiono esplicitamente in L.

3) Eq. di Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}m\dot{r} = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mg\cos\theta - k(r-l_0) + mr\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{r} = g\cos\theta - \frac{k}{m}(r-l_0) + r\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g}{r}\sin\theta$$

4) Pti di equilibrio e loro stabilità

$$V(r,\theta) = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -mg\cos\theta + K(r-l_0) \quad = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgr\,\text{sen}\theta \quad = 0 \quad \to \quad \theta = 0, \pi$$

esiste sempre

1° ep. $\theta = 0$: $\quad -mg + Kr - Kl_0 = 0 \Rightarrow r = l_0 + \frac{mg}{K} = r_0$

$\theta = \pi$: $\quad mg + Kr - Kl_0 = 0 \Rightarrow r = l_0 - \frac{mg}{K} = r_\pi$

esiste sol
se $Kl_0 \geq mg$

$$b = \partial^2 V = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial r} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & mg\,\text{sen}\theta \\ mg\,\text{sen}\theta & mgr\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$b(r_0, 0) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & mgr_0 \end{pmatrix}$$ def. positiva $\Rightarrow$ $(r_0, 0)$ è pto ep. stab.

$$b(r_\pi, \pi) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -mgr_\pi \end{pmatrix}$$ non-def. $\Rightarrow$ (r_π, π) è pto ep. instabile

5) Lagrangiana linearizzata e freq. dei modi normali di oscill.

$$\mathcal{a} = \begin{pmatrix} m & \\ & mr^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \mathcal{a}(r_0, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & mr_0^2 \end{pmatrix}$$

$$B = b(r_0, 0) = \begin{pmatrix} K & \\ & mgr_0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(B - \lambda A) = (K - \lambda m)(mgr_0 - \lambda m r_0^2)$$

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = \frac{K}{m} \qquad \omega_2^2 = \lambda_2 = \frac{g}{r_0}$$

$\lambda = r - r_0$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} m r_0^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k \lambda^2 - \frac{1}{2} m g r_0 \theta^2$$

6) Eq. del moto della Lag. lin.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \ddot{\lambda} + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r_0}\theta = 0$$

7) Verificare che le eq. di Lag. trovate in 2) si' linearizzano a quelle trovate in 6

$\ddot{x} = f(\overset{\downarrow}{x}, \dot{x})$
$\uparrow$
espandere e tenere solo termini lineari (termine cost. si annulla nel pto di equil.)

$$\ddot{r} = g\cos\theta - \frac{k}{m}(r - l_0) + r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g}{r}\sin\theta$$

→ Espandiamo attorno a $(r_0, 0)$ con vel. piccole

È comodo def. $\lambda = r - r_0$

$l_0 + \frac{mg}{k} = r_0$

$$\begin{cases} \ddot{\lambda} = g\cos\theta - \frac{k}{m}(\lambda + r_0 - l_0) + (\lambda + r_0)\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{\lambda}\dot{\theta}}{\lambda + r_0} - \frac{g}{\lambda + r_0}\sin\theta \end{cases}$$

ora espandiamo attorno $(\lambda, \theta, \dot{\lambda}, \dot{\theta}) = (0, 0, 0, 0)$

Partiamo dalla seconda

$$\ddot{\theta} = -\cancel{\frac{2\dot{\lambda}\dot{\theta}}{\lambda + r_0}} - \underbrace{\frac{g}{\lambda + r_0}}_{\frac{g}{r_0} + O(\lambda)} \overbrace{\sin\theta}^{\theta + \dots} \simeq -\frac{g}{r_0}\theta \quad \checkmark$$

trascurabile perché è almeno quadratico

$$\frac{1}{\lambda + r_0} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{r_0}} \qquad \frac{1}{1+\epsilon} \sim 1 - \epsilon + \dots$$

$$\ddot{\lambda} = g\cos\theta - \frac{K}{m}\Big(\lambda + \underbrace{r_0 - l_0}_{\frac{mg}{K}}\Big) + (\lambda + r_0)\dot{\theta}^2$$

$$= g\underbrace{\cos\theta}_{1 - \cancel{\frac{\theta^2}{2}} + \dots} - g - \frac{K}{m}\lambda + \cancel{(\lambda + r_0)\dot{\theta}^2} \approx \cancel{g} - \cancel{g} - \frac{K}{m}\lambda \quad \checkmark$$

è quadratico e quindi trascurabile

trascurabile perché è almeno quadratico