$L^2(\mathbb{R})$

$V_F = \langle\ |0\rangle\ ,\ \bar{\psi}|0\rangle\ \rangle$

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes V_F$$ ← prodotto tensore

$$= L^2(\mathbb{R})|0\rangle \oplus L^2(\mathbb{R})\bar{\psi}|0\rangle$$ ← somma diretta

$$= \mathcal{H}_B \oplus \mathcal{H}_F$$

Se restringiamo l'op. F a $\mathcal{H}_B$ otteniamo 0, se lo restring. a $\mathcal{H}_F$ otteniamo 1.

$$F|_{\mathcal{H}_B} = 0 \qquad\qquad F|_{\mathcal{H}_F} = 1$$

Spezziamo lo sp. di Hilb. $\mathcal{H}$ in addendi con un diverso valore di F → si dice che $(-1)^F$ fornisce un $\mathbb{Z}_2$ grading su $\mathcal{H}$

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

• Nella teoria classica abbiamo visto che Q e $\bar{Q}$ sono quantità conservate. Quindi ci aspettiamo che a livello quant.

$$[H, Q] = 0 \qquad\qquad [H, \bar{Q}] = 0$$

$$Q = \bar\psi(-ip + h') \qquad \bar Q = \psi(-ip + h')$$

$[x, p] = i$

$\{\psi, \bar\psi\} = 1 \Rightarrow \psi\bar\psi = 1 - \bar\psi\psi$

Verifichiamo

$$h''(\bar\psi\psi - 1/2) = h''(F - 1/2)$$

$$[H, Q] = \Big[\frac{p^2}{2} + \frac{(h')^2}{2} + \frac{h''}{2}\overbrace{(\bar\psi\psi - \psi\bar\psi)}, \, ip\bar\psi + h'\bar\psi \Big] =$$

$$= \Big[\frac{p^2}{2}, h'\Big]\bar\psi + \Big[\frac{(h')^2}{2}, ip\Big]\bar\psi + i\Big[h''(F - \tfrac{1}{2}), p\bar\psi\Big] + h'h''[F, \bar\psi] =$$

$$[p, f(x)] = -if'(x) \Rightarrow [p^2, f(x)] = p[p,f] + [p,f]p = -i(pf' + f'p)$$

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B \qquad [F, \bar\psi] = \bar\psi$$

$$[(h')^2, p] = -[p, (h')^2] = i\, 2h'h''$$

$$= -\frac{i}{2}\bar\psi(ph'' + h''p) - \cancel{h'h''\bar\psi} + ih''[\overbrace{F - \cancel{\tfrac{1}{2}}, \bar\psi}^{\bar\psi}]p$$

$$+ i[h'', p]\bar\psi(\cancel{F} - \tfrac{1}{2}) + \cancel{h'h''\bar\psi}$$

$$\bar\psi F = \bar\psi(\bar\psi\psi) = \bar\psi^2\psi = 0$$

$$= +\frac{i}{2}\bar\psi(-ph'' + h''p) + i[h'', p]\bar\psi(-\tfrac{1}{2}) = 0$$

- La carica conservata GENERA le trasf. di simm. associate

$$\delta\hat x = [\epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q, \hat x]$$

$$\delta\hat\psi = [\epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q, \hat\psi]$$

$$\delta\hat{\bar\psi} = [\epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q, \hat{\bar\psi}]$$

Per esempio:

$$[Q, x] = [ip\bar\psi + \cancel{h'}, x] = i[p, x]\bar\psi = i(-i)\bar\psi = \bar\psi$$

$$[\bar Q, x] = [-ip\psi + h', x] = -i[p, x]\psi = -i(-i)\psi = -\psi$$

$$\Rightarrow [\epsilon Q + \bar\epsilon\bar Q, x] = \epsilon\bar\psi - \bar\epsilon\psi = \delta x$$

- Le supercariche agiscono su $\mathcal{H}$ mappando stati bosonici in stati fermionici e viceversa. Questa è una conseguenza delle relaz.:

$$Q(-1)^F = -(-1)^F Q \qquad e \qquad \bar{Q}(-1)^F = -(-1)^F \bar{Q}$$

(che seguono da $[F, Q] = Q$ e $[F, \bar{Q}] = -\bar{Q}$; $(-1)^F = e^{i\pi F}$)

$$(-1)^F\left[Q|\psi_{bos}\rangle\right] = -Q(-1)^F|\psi_{bos}\rangle = -\left[Q|\psi_{bos}\rangle\right] \Rightarrow \text{ferm.}$$
$$(-1)^F\left[Q|\psi_{fer}\rangle\right] = -Q(-1)^F|\psi_{fer}\rangle = +\left[Q|\psi_{fer}\rangle\right] \Rightarrow \text{bosonico}$$

- Q e $\bar{Q}$ sono NILPOTENTI, cioè $\{Q, Q\} = 0$ e $\{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0$.

- Invece $\{Q, \bar{Q}\} = 2H$ (Algebra di susy è un'estensione dell'algebra di Poincaré)

Dim:

$$\{Q, \bar{Q}\} = \{ip\bar{\psi} + \bar{\psi}h', -ip\psi + \psi h'\} =$$

$$= p^2\{\bar{\psi}, \psi\} + iph'\bar{\psi}\psi + ih'p\psi\bar{\psi} - ih'p\bar{\psi}\psi - iph'\psi\bar{\psi} + (h')^2\{\bar{\psi}, \psi\}$$

$$= p^2 + (h')^2 + i\bar{\psi}\psi[p, h'] - i\psi\bar{\psi}[p, h'] =$$

$$= p^2 + (h')^2 + i(\bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi})(-ih'')$$

$$= p^2 + (h')^2 + h''(\bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi}) = 2H \quad //$$

dove $H = \frac{p^2}{2} + \frac{(h')^2}{2} + \frac{h''}{2}(\bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi})$

questo è vero con la scelta di ordine fatta in

Viene chiamata Meccanica Quantistica Supersimmetrica, una meccanica quant. con un grading $\mathbb{Z}_2$ dato da $(-1)^F$ su $\mathcal{H}$ e con op. Q e $\bar{Q}$ che soddisfano le regole di comm.

Algebra di susy
$$\begin{cases} \{Q, \bar{Q}\} = 2H \\ \{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \end{cases} \qquad (\star)$$

* Notiamo che se Q e $\bar{Q}$ soddisfano $(\star)$, allora è immediato che

$$[H, Q] \underset{1^\circ \text{ di } (\star)}{=} \left[\frac{1}{2}(Q\bar{Q} + \bar{Q}Q), Q\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(Q\bar{Q}Q - \underbrace{\cancel{QQ\bar{Q}}}_{=0 \text{ per } 2^\circ \text{ di } (\star)}) + \frac{1}{2}(\bar{Q}\cancel{QQ} - Q\bar{Q}Q)$$
$$= \frac{1}{2}(Q\bar{Q}Q - Q\bar{Q}Q) = 0$$

* Rispetto $(-1)^F$

H è pari $\qquad H(-1)^F = (-1)^F H \qquad (\#)$

$Q, \bar{Q}$ sono dispari $\qquad \overset{(-)}{Q}(-1)^F = -(-1)^F \overset{(-)}{Q}$

In particolare $(\#)$ ci dice che H preserva la decomposizione

$$\mathcal{H} = \underset{(-1)^F = 1}{\mathcal{H}^B} \oplus \underset{(-1)^F = -1}{\mathcal{H}^F}$$

Mentre Q e $\bar{Q}$: $\mathcal{H}^B \leftrightarrow \mathcal{H}^F$

- Una conseguenza importante di $H = \frac{1}{2}\{Q, \bar{Q}\}$ è che H è un op. DEFINITO POSITIVO:

$$\bar{Q} = Q^{\dagger}$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|Q\bar{Q} + \bar{Q}Q|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\psi|Q\bar{Q}|\psi\rangle + \langle\psi|\bar{Q}Q|\psi\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\|\bar{Q}|\psi\rangle\|^2 + \|Q|\psi\rangle\|^2\right) \geq 0$$

- Inoltre $\quad H|\psi\rangle = 0 \iff Q|\psi\rangle = 0$ e $\bar{Q}|\psi\rangle = 0$

Uno stato a ENERGIA ZERO è uno STATO SUPERSIMMETRICO A MINIMA EN. (GROUND STATE)

se applico la trasf. di susy a $|\psi\rangle$, ottengo $|\psi\rangle$

- $$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0,1,\dots} \mathcal{H}_{(n)} \qquad H\big|_{\mathcal{H}_{(n)}} = E_n \qquad E_0 = 0, \quad E_0 < E_1 < E_2 < \dots$$

- Se non ci sono autostati a energia nulla, $\mathcal{H}_{(0)} = 0$

$$[H, Q] = 0, \quad [H, \bar{Q}] = 0, \quad [H, (-1)^F]$$

$$\Rightarrow \quad Q, \bar{Q}, (-1)^F : \mathcal{H}_{(n)} \to \mathcal{H}_{(n)}$$

e in particolare

$$\mathcal{H}_{(n)} = \mathcal{H}^B_{(n)} \oplus \mathcal{H}^F_{(n)}$$

- Consideriamo la combinazione $\quad Q_1 = Q + \bar{Q}, \quad Q_1^2 = 2H$

$Q_1 : \mathcal{H}^B_{(n)} \longleftrightarrow \mathcal{H}^F_{(n)}$ (preserva i livelli di energia)

Siccome $Q_1^2 = 2E_n \mathbb{1}$ su $\mathcal{H}_{(n)}$, se $E_n > 0$

allora Q_1 è INVERTIBILE $\left(Q_1^{-1} = \frac{1}{2E_n} Q_1 \right)$

$\Rightarrow$ Q_1 definisce un ISOMORFISMO : $\mathcal{H}^B_{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}^F_{(n)}$

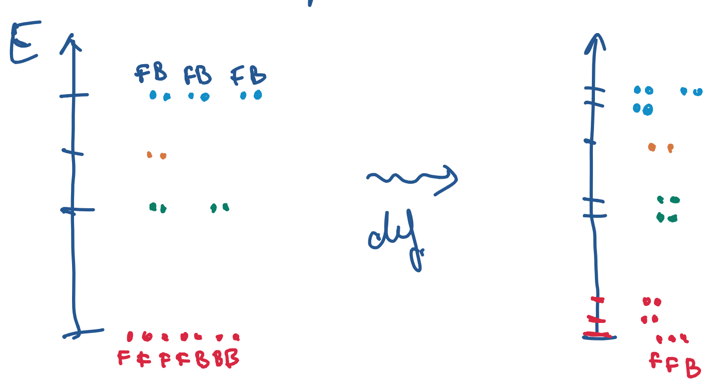
$\Rightarrow$ $\mathcal{H}^B_{(n)} \cong \mathcal{H}^F_{(n)}$ $(n \neq 0)$

→ Esiste una corrispondenza biunivoca fra stati fermionici e stati bosonici della stessa en. (per $E_n > 0$) : per ogni stato ferm. $\exists!$ stato bosonico e viceversa.

Quando $n = 0$ $(E_0 = 0)$, allora $Q_1^2 = 0$ → Q_1 non è invert. e può non ottenersi in generale un isomorf. fra $\mathcal{H}^B_{(0)}$ e $\mathcal{H}^F_{(0)}$ (Posso avere un numero diverso di stati bos. e ferm. a en. zero)

Consideriamo una DEFORMAZIONE CONTINUA della teoria (lo spettro di H si def. in maniera continua) che preservi susy

→ per $E_n > 0$ qualche livello (degenere in partenza) potrebbe splittare in diversi livelli en.; ma in ogni nuovo livello ho sempre lo stesso numero di stati bos. e ferm.



→ In $E_0 = 0$, può succedere che qualche stato B prende en. >0, ma lo può fare solo in coppia con uno F.

→ La differenza fra il numero di stati Bosonici e il numero di stati Fermionici è un INVARIANTE sotto def. continue (susy) della teoria.

Questo inv. è chiamato WITTEN INDEX

$$\dim \mathcal{H}^B_{(0)} - \dim \mathcal{H}^F_{(0)} = \mathrm{Tr}\left[(-1)^F e^{-\beta H}\right]$$