TEORIA DELLE PERTURBAZIONI RINORMALIZZATA. [PS.10.2]

Riprendiamo la teoria $\lambda\varphi^4$ in 4 dimensioni ed approfondiamo l'approccio con i controtermini.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4$$

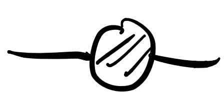
$m_0, \lambda_0 \Rightarrow$ parametri "bare" della Lagrangiana, non osservabili.

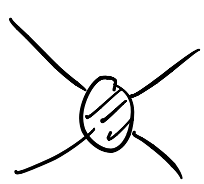
La teoria è invariante sotto $Z_2: \varphi \to -\varphi$, quindi tutti i diagrammi con un numero dispari di φ nelle gambe esterne sono nulli.

Il grado di div. sup. è $D = 4 - N$

Gli unici diagrammi divergenti sono:

 $\sim \Lambda^4 \Rightarrow$ energia del vuoto <u>non osservabile</u> in assenza della gravità

 $\sim \Lambda^2 + p^2\log\Lambda \Rightarrow$ rinormalizzazione della massa e del termine cinetico

 $\sim \log\Lambda \Rightarrow$ rinormalizzazione di λ

Queste 3 divergenze possono essere riassorbite da 3 parametri della teoria:

$\{m_0, \text{ campo } \varphi, \lambda_0\}$

Avevamo visto che:

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{ip(x-y)}\left[\frac{iZ}{p^2-m^2+i\varepsilon} + i\int_{m_{th}^2}^{\infty} dq^2\, \frac{\hat{\rho}(q^2)}{p^2-q^2+i\varepsilon}\right]$$

dove m è la massa fisica.

In LSZ, ad ogni campo esterno si applicava un fattore $Z^{-1/2}$.

Riscalando i campi $\varphi \equiv Z^{1/2}\varphi_r$ possiamo eliminare questi fattori. Adesso però Z entra in $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z (\partial_\mu \varphi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 Z \varphi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \varphi_r^4$$

Definiamo:

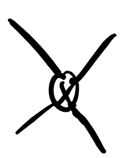
$$Z \equiv 1 + \delta_Z \,, \qquad m_0^2 Z \equiv m^2 + \delta_m \,, \qquad \lambda_0 Z^2 \equiv \lambda + \delta_\lambda \,,$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_r)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi_r^4$$

$$\left.+ \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu \varphi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m \varphi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\varphi_r^4 \quad \right\} \text{CONTROTERMINI}$$

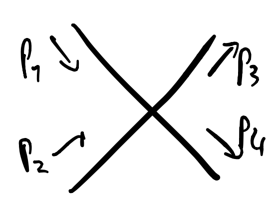
Questi controtermini vengono fissati da opportune CONDIZIONI DI RINORMALIZZAZIONE.

Sono nuove interazioni che riassorbono le divergenze:

 $= i(p^2\delta_Z - \delta_m)$  $= -i\delta_\lambda$

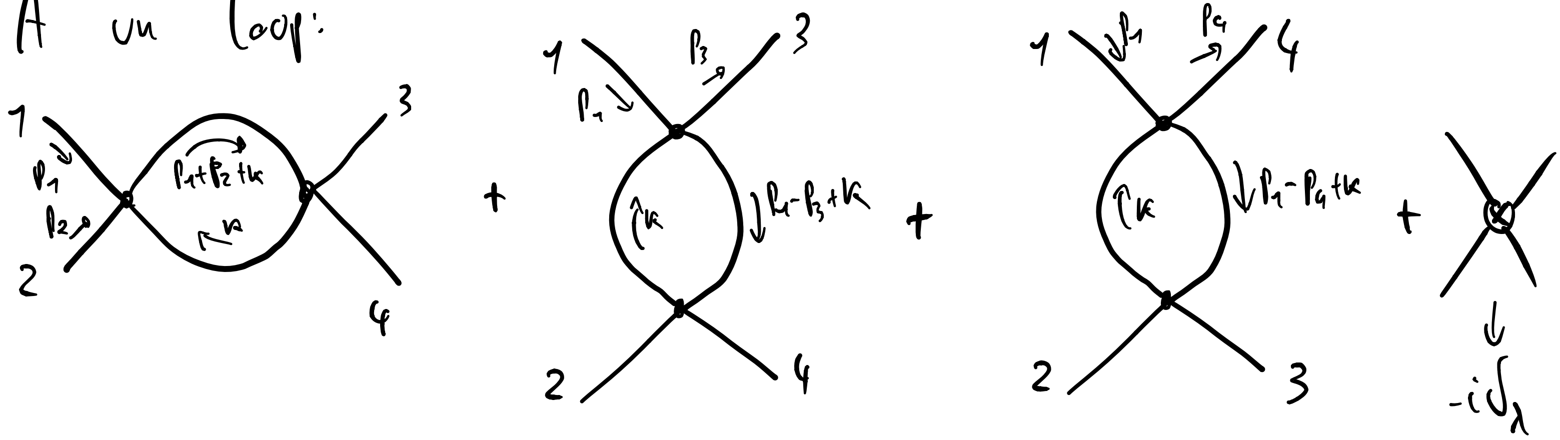
Calcolo di $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$ in $\lambda\varphi^4$ a 1 loop

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_r)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi_r^4 + (\text{controtermini})$$

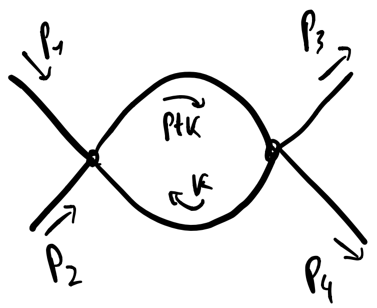


$= -i\lambda$

A un loop:



$p \equiv p_1 + p_2$



fattore di simmetria

$$= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2-m^2+i\varepsilon)} \frac{i}{((p+k)^2-m^2+i\varepsilon)} =$$

$$\equiv (-i\lambda)^2\, i\, V(p^2)$$

Essendo una funzione scalare può dipendere solo da p^2.

La somma di tutti i diagrammi è:

$$i\mathcal{M}(12\to 34) = -i\lambda + (i\lambda)^2\left[iV(s) + iV(t) + iV(u)\right] - i\delta_\lambda$$

dove

$$s = (p_1+p_2)^2, \quad t = (p_1-p_3)^2, \quad u = (p_1-p_4)^2$$

e $\quad s + t + u = 4m^2$

Dobbiamo calcolare quindi $V(p^2)$.

$$iV(p^2) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2-m^2+i\varepsilon)} \frac{i}{\left[(p+k)^2-m^2+i\varepsilon\right]}$$

PARAMETRIZZAZIONE DI FEYNMAN

Sfruttiamo l'identità $\displaystyle \frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{(xA+(1-x)B)^2}$

$B = k^2-m^2+i\varepsilon$

$A = (p+k)^2-m^2+i\varepsilon$

$$xA+(1-x)B = x(p^2+k^2+2p\cdot k - m^2+i\varepsilon) + (1-x)(k^2-m^2+i\varepsilon) =$$

$$= k^2 + xp^2 + 2x\, p\cdot k - m^2 + i\varepsilon \equiv \ell^2 - \Delta + i\varepsilon$$

dove $\ell \equiv k + px$ e $\Delta = m^2 - p^2 x(1-x)$

Abbiamo:
$$V(p^2) = \frac{i}{2}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \, \frac{1}{(\ell^2-\Delta+i\varepsilon)^2}$$

DIM-REG

Regolarizziamo la divergenza UV in dim-reg

con $d=4-\varepsilon$: $\int d^4\ell \to \int d^d\ell$

- L'accoppiamento λ ~~diventa~~ prende una dimensione di energia. $[\lambda] = 4-d = \varepsilon$ per $d=4-\varepsilon$.

Definiamo quindi:

$\lambda \xrightarrow{d=4-\varepsilon} \lambda\mu^\varepsilon$ con μ una scala di energia, tenendo λ adimensionale: $[\lambda] = 0$.

ROTAZIONE DI WICK

Considero solo 1 potenza in λ dato che:

$$iM \sim -i\lambda \mu^\varepsilon \left(1 + \lambda \mu^\varepsilon (\dots)\right) - i\delta_\lambda \mu^\varepsilon$$

$$V(p^2) = \frac{i}{2} \mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^2}$$

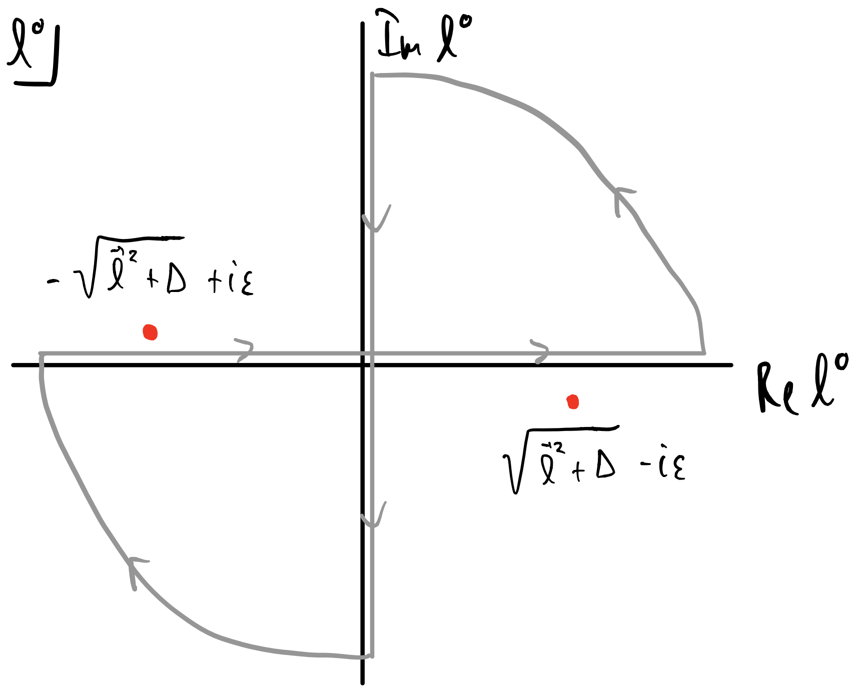
Assumiamo $\Delta > 0$

(risultato sarà valido anche per $\Delta < 0$)

L'integrando ha poli per

$$l^0 = \sqrt{\vec{l}^2 + \Delta} - i\varepsilon \quad e \quad l^0 = -\sqrt{\vec{l}^2 + \Delta} + i\varepsilon$$

Estendiamo analiticamente l'integrale nel piano complesso di l^0



L'integrale lungo questo contorno è nullo.

Quelli sugli archi danno contributo nullo, all'infinito.

$$\oint dl^0 f(l^0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) - \int_{-i\infty}^{+i\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) = \left[l^0 = i l^0_E \right]$$

Euclideo

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0 f(l^0, \vec{l}) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dl^0_E f(i l^0_E, \vec{l})$$

ovvero

$$l^2 = l^{02} - \vec{l}^2 \rightarrow -l_E^{02} - \vec{l}^2 = -l_E^2$$

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta + i\varepsilon)^2} = i \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

Adesso possiamo eliminare il $+i\varepsilon$.

$$= i \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\ell_E \, \frac{\ell_E^{d-1}}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}$$

Integrale di superficie $\int d\Omega_d$

Area della sfera unitaria in d-dimensioni:

$$(\sqrt{\pi})^d = \left(\int dx \, e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x_i \, e^{-\sum_i x_i^2} = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx \, x^{d-1} e^{-x^2} = [x^2 = t]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty dt \, t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t}}_{\Gamma(\frac{d}{2})} \int d\Omega_d \Rightarrow \boxed{\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}}$$

FUNZIONE GAMMA

$\Gamma(n) = (n-1)!$ per $n \in \mathbb{N}$, $\quad \Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \, dx$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\quad \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$

$\gamma \approx 0.5772\ldots$

costante di Eulero-Mascheroni

Integrale radiale

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2+\Delta)^2} = \left[x=\frac{\Delta}{l_E^2+\Delta}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\int_0^1 dx\, x^{1-\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-1}$$

$$B(\alpha,\beta) \equiv \int_0^1 dx\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Vedi [S.B.3.2] per caso generale

$$\Rightarrow \mu^{2\varepsilon}\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l^2-\Delta+i\varepsilon)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\mu^{2\varepsilon}}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\Gamma\Big(\underbrace{\frac{4-d}{2}}_{=\frac{\varepsilon}{2}}\Big)$$

Espandendo per $d=4-\varepsilon$ e $\varepsilon\to 0$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon}-\gamma+O(\varepsilon) \quad , \quad \mu^{\varepsilon} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon\log\mu^2} = 1+\frac{\varepsilon}{2}\log\mu^2+O(\varepsilon^2)$$

$$\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = e^{\frac{\varepsilon}{2}\log\frac{4\pi}{\Delta}} = 1+\frac{\varepsilon}{2}\left(\log 4\pi-\log\Delta\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$\mu^{\varepsilon}\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l^2-\Delta+i\varepsilon)^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{i}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi-\log\frac{\Delta}{\mu^2}+O(\varepsilon)\right)$$

Mettendo tutto insieme:

$$V(p^2) = \frac{-1}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left[\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi-\log\frac{m^2-p^2x(1-x)}{\mu^2}+O(\varepsilon)\right]$$

CONDIZIONI DI RINORMALIZZAZIONE

Definiamo: $i\mathcal{M}_{12\to 34}(s=4m^2, t=u=0)^{*}_{1\text{-loop}} \equiv -i\lambda$ ⇐ MISURATO

⇒ λ è l'accoppiamento RINORMALIZZATO, definito a quella specifica scala d'energia

$$\Rightarrow -i\lambda + (i\lambda)^2 i\left[V(4m^2) + 2V(0)\right] - i\delta_\lambda = -i\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_\lambda = -\lambda^2\left[V(4m^2) + 2V(0)\right]}$$

$$\mathcal{M}_{12\to 34}(s,t,u) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left[\log\frac{m^2 - s\,x(1-x)}{m^2 - 4m^2 x(1-x)} + \log\frac{m^2 - t\,x(1-x)}{m^2} + \log\frac{m^2 - u\,x(1-x)}{m^2}\right]$$

La dipendenza da μ e da ε è andata via.
Predico l'ampiezza a energie arbitrarie in termini di quantità fisiche. Il risultato è FINITO.

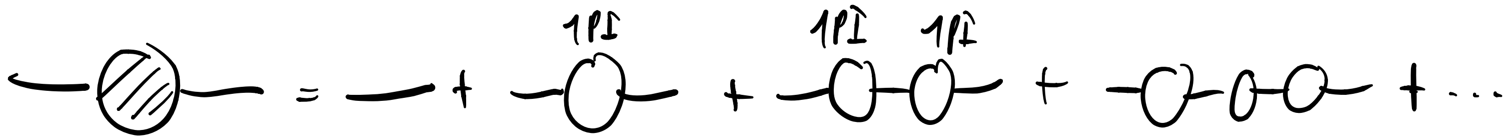
* La specifica configurazione scelta per rinormalizzare λ non è obbligatoria. È infatti anche possibile scegliere configurazioni non fisiche

Funzione a 2 punti

Per determinare δ_Z e δ_m dobbiamo calcolare la funzione a 2 punti, di diagrammi 1PI

$$= -i\,\tilde{\Pi}(p^2)$$

La funzione a 2 punti (connessa) totale è quindi data da:

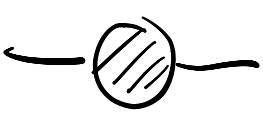


$$= \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\left(-i\tilde{\Pi}\right)\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\left(-i\tilde{\Pi}\right)\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\left(-i\tilde{\Pi}\right)\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \dots$$

massa rinormalizzata

$$= \frac{i}{p^2-m^2-\tilde{\Pi}(p^2)+i\varepsilon}$$

Le condizioni di rinormalizzazione nello schema MOM sono:



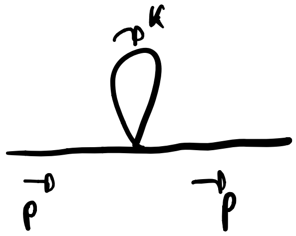
$$= \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} + \left(\text{termini regolari per } p^2=m^2\right)$$

ovvero

$$\boxed{\tilde{\Pi}(m^2) = 0 \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{d}{dp^2}\tilde{\Pi}(p^2)\right|_{p^2=m^2} = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{i}{p^2-m^2-\tilde{\Pi}(p^2)+i\varepsilon} \simeq \frac{i}{p^2-m^2-\underset{\overset{\parallel}{0}}{\tilde{\Pi}(m^2)}-(p^2-m^2)\,\tilde{\Pi}'(0)+O(p^2-m^2)^2+i\varepsilon} \simeq \frac{i}{(p^2-m^2)\underbrace{\left(1-\tilde{\Pi}'(0)\right)}_{Z^{-1}}}$$

A un loop abbiamo:

$-i\Pi(p^2) =$  $+$  $=$

$$= -i\lambda \, \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + i\left(p^2 \delta_Z - \delta_m\right) =$$

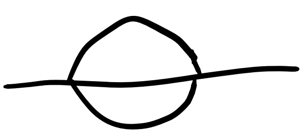
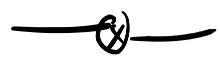
$$= -i \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}{(m^2)^{1-d/2}} + i\left(p^2 \delta_Z - \delta_m\right) \qquad 1-\frac{d}{2} \simeq -1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

è indipendente da p^2 quindi

$$\Rightarrow \boxed{\delta_Z = 0 \quad , \quad \delta_m = -\frac{\lambda}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}{(m^2)^{1-d/2}}}$$

$$\Rightarrow \Pi(p^2) = 0$$

Un contributo non nullo nasce a 2 loop:

 $+$  $+$ 

$-i\delta_\lambda$