



*Prof. Roberto Capone*

# Calcolo differenziale per le funzioni di due o più variabili

Corso di Analisi Matematica  
2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DEL MOLISE

# Le derivate parziali

Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $P_0 = (x_0, y_0)$  un punto di  $A$ .

Essendo  $A$  un aperto, esiste un intorno  $I(P_0, \delta) \subset A$ .

Preso un punto  $P(x, y) \in I(P_0, \delta)$ ,  $P \neq P_0$ , possiamo definire i due rapporti incrementali:

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Rapporto incrementale  
rispetto a  $x$

e

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Rapporto incrementale  
rispetto a  $y$

Se esiste ed è finito il limite per  $x \rightarrow x_0$  del primo rapporto, si dice che la funzione  $f(x, y)$  è parzialmente derivabile rispetto a  $x$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

Il valore di tale limite si chiama derivata parziale rispetto a  $x$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

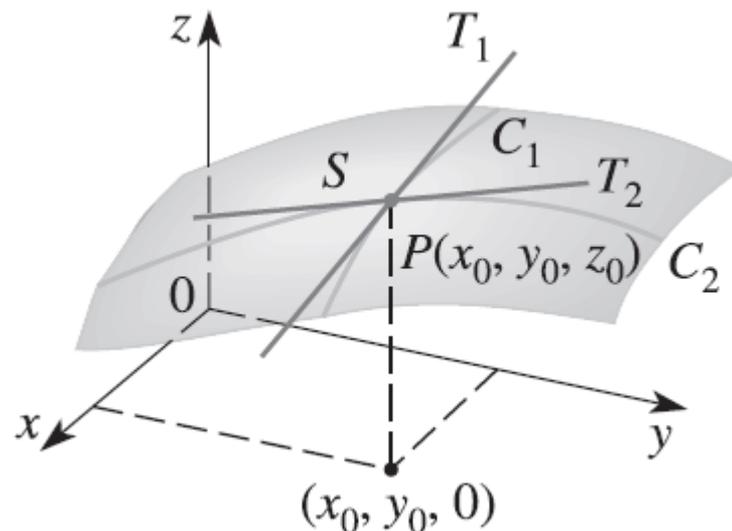
Analogamente se esiste il limite per  $y \rightarrow y_0$  del secondo rapporto, si dice che la funzione è parzialmente derivabile rispetto a  $y$  nel punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Il valore di tale limite si chiama derivata parziale rispetto a  $y$  della funzione nel punto  $(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0)$$

# Significato geometrico della derivata parziale

Per le funzioni di una variabile la derivata è la pendenza (o coefficiente angolare) della retta tangente al grafico della funzione nel punto assegnato.

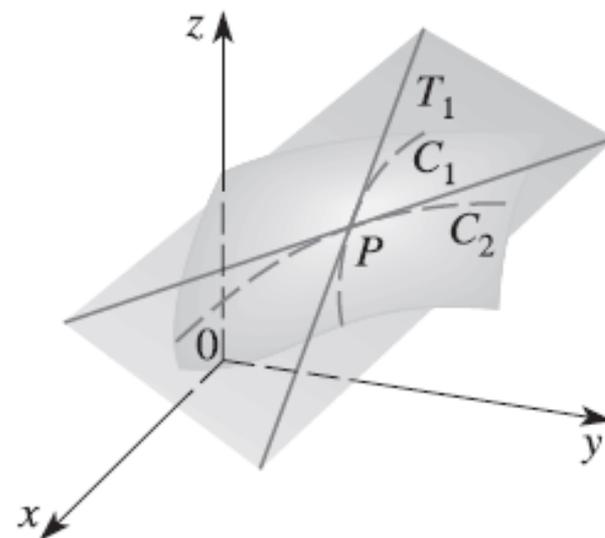
Le derivate parziali di una funzione di due variabili sono anch'esse legate alle pendenze di rette tangenti al grafico, ma di queste rette, ora, ce n'è più d'una.



Il grafico della funzione  $z = f(x, y)$  è una superficie  $S$  in  $R^3$ , ed il punto  $P$  di coordinate  $P(x_0, y_0, z_0)$  con  $z_0 = f(x_0, y_0)$  si trova su di essa. Fissare  $y = y_0$  significa restringere l'attenzione alla curva  $C_1$  data dall'intersezione di  $S$  col piano verticale di equazione  $y = y_0$  (la *traccia di S* nel piano  $y = y_0$ : questa curva è in effetti il grafico della funzione di una variabile  $z = g_1(x) = f(x, y_0)$ , visualizzato in un piano verticale. La curva  $C_1$  passa per il punto  $P$  e la sua retta tangente in  $P$  ha coefficiente angolare pari a

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La derivata parziale di  $f$  rispetto a  $x$  in  $(x_0, y_0)$  è dunque il coefficiente angolare della retta  $T_1$  tangente in  $P$  alla traccia di  $S$  nel piano verticale  $y = y_0$ . Analogamente  $f_y(x_0, y_0)$  è il coefficiente angolare della retta  $T_2$  tangente in  $P$  alla curva  $C_2$ , traccia di  $S$  nel piano verticale  $x = x_0$ .



La curva  $C_1$  può essere parametrizzata come  $(x, y_0, f(x, y_0))$ , al variare di  $x$ ; pertanto essa ha, in  $P$ , vettore tangente  $u = (1, 0, f_x(x_0, y_0))$ . Analogamente,  $C_2$  può essere parametrizzata come  $(x_0, y, f(x_0, y))$  con parametro  $y$  e il suo vettore tangente in  $P$  è  $v = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$ . Osserviamo che le due rette  $T_1$  e  $T_2$  hanno il punto  $P$  in comune e dunque esiste un unico piano (passante per  $P$ ) che le contiene

Il vettore  $\mathbf{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$  è normale a tale piano, che ha pertanto equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

# Esempio

Consideriamo il paraboloido  $z = x^2 + y^2$

Le sue derivate parziali in un generico punto  $P(x, y)$  sono:

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

Se scegliamo  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  otteniamo

$$f_x(0, 0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

L'equazione del piano diventa  $z = 0$

Se vogliamo invece calcolarlo nel punto  $(1, 2, f(1, 2))$  abbiamo:

$$f(1, 2) = 5$$

$$f_x(1, 2) = 2$$

$$f_y(1, 2) = 4$$

e risulta:

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

# Derivabilità

Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $P_0 = (x_0, y_0)$  un punto di  $A$ .

Se in un punto  $(x_0, y_0)$  esistono entrambe le derivate parziali  $f_x(x_0, y_0)$  e  $f_y(x_0, y_0)$  si dice che la funzione è derivabile in  $(x_0, y_0)$

Se  $f$  è derivabile in ogni punto  $(x_0, y_0) \in A$ , si dice che  $f$  è derivabile in  $A$ .

Per le funzioni di una sola variabile, l'esistenza della derivata implica sia la continuità che l'esistenza della retta tangente al grafico, nel senso del limite delle rette secanti.

La derivabilità parziale *non* è la naturale estensione alle funzioni di più variabili della nozione di derivabilità in una variabile sola e non permette di definire un piano tangente.

Il problema può essere superato introducendo la più forte condizione di *differenziabilità*.

# Derivate successive

Se  $f(x, y)$  è una funzione derivabile in un aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , le sue derivate parziali  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$  sono funzioni di due variabili e possono essere a loro volta derivabili. Ad esempio, se  $f_x(x, y)$  è derivabile, è possibile calcolarne le derivate parziali rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , che verranno indicate rispettivamente con i simboli equivalenti

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$
$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Analogamente

Se  $f_y(x, y)$  è derivabile possiamo calcolare le derivate seconde e verranno indicate con i simboli equivalenti

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$
$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

# Derivate direzionali

Definiamo la derivata direzionale della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $P_0(x_0, y_0)$  lungo la direzione del versore  $\mathbf{v} = (a, b)$ , il seguente limite (se esiste ed è finito)

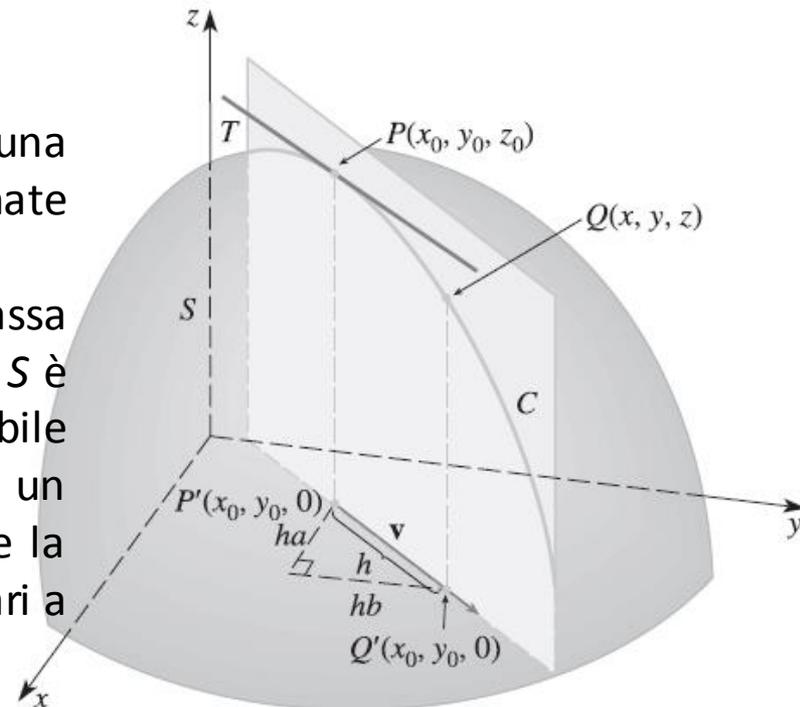
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{t}$$

e si indica con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$$

Il grafico della funzione  $z = f(x, y)$  rappresenta una superficie  $S$  in  $R^3$ , e il punto  $P$  di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  con  $z_0 = f(x_0, y_0)$  si trova su  $S$ .

Fissato  $\mathbf{v}$ , consideriamo il piano verticale che passa per  $P$  nella direzione di  $\mathbf{v}$ : la sua intersezione con  $S$  è una curva  $C$ , grafico della funzione di una variabile  $z = g(h) = f(x_0 + ah, y_0 + bh)$  visualizzato in un piano verticale. La curva  $C$  passa per il punto  $P$  e la sua retta tangente in  $P$  ha coefficiente angolare pari a  $g'(0)$ , ovvero  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$



# Teorema di Schwarz

Sia  $A$  un aperto di  $R^2$ , sia  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$  e  $f(x, y)$  una funzione derivabile due volte in  $A$ . Se le derivate seconde miste sono continue nel punto  $(x_0, y_0)$  allora risulta

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

## Dimostrazione

Fissato un  $(x, y)$  nel dominio di  $f$  in cui le derivate miste siano continue, si consideri l'incremento  $(h, k) \in R^2$  in modo che tutto il rettangolo di vertici  $(x, y), (x + h, y), (x, y + k), (x + h, y + k)$  stia a sua volta nel dominio di  $f$ .

Con queste notazioni, si fissi  $k$  e si definisca la funzione di una variabile:

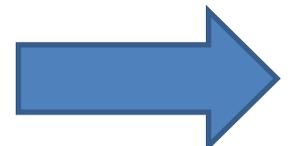
$$\varphi(h) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y)$$

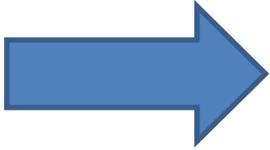
Applicando il teorema di Lagrange a  $\varphi$  sull'intervallo di estremi  $0$  e  $h$  otteniamo:

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(h_1)h = h[\partial_x g(x + h_1, y + k) - \partial_x g(x + h_1, y)]$$

Per un opportuno  $h_1$

Se interpretiamo l'ultima espressione come funzione di  $k$ , possiamo nuovamente applicare il teorema di Lagrange e scrivere (per  $k_1$  opportuno):





$$\varphi(h) - \varphi(0) = hk \partial_y (\partial_x g(x + h_1, y + k_1))$$

Applicando lo stesso ragionamento alla funzione

$$\psi(k) = g(x + h, y + k) - g(x, y + k)$$

e successivamente alla sua derivata, vista come funzione di  $h$ , otteniamo, per  $h_2, k_2$  opportuni

$$\psi(k) - \psi(0) = hk \partial_x (\partial_y g(x + h_2, y + k_2))$$

Osservando che

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \psi(k) - \psi(0)$$

e scegliendo  $h$  e  $k$  non nulli, si ha:

$$\partial_y (\partial_x g(x + h_1, y + k_1)) = \partial_x (\partial_y g(x + h_2, y + k_2))$$

Passando al limite per  $h$  e  $k$  che tendono a 0, grazie alla continuità delle due derivate seconde, otteniamo la tesi.

Alla luce di questa dimostrazione, notiamo che le ipotesi del teorema possono essere indebolite: basta richiedere la continuità delle derivate miste in un punto per garantire la loro uguaglianza in quel punto.

# Differenziabilità

## Definizione

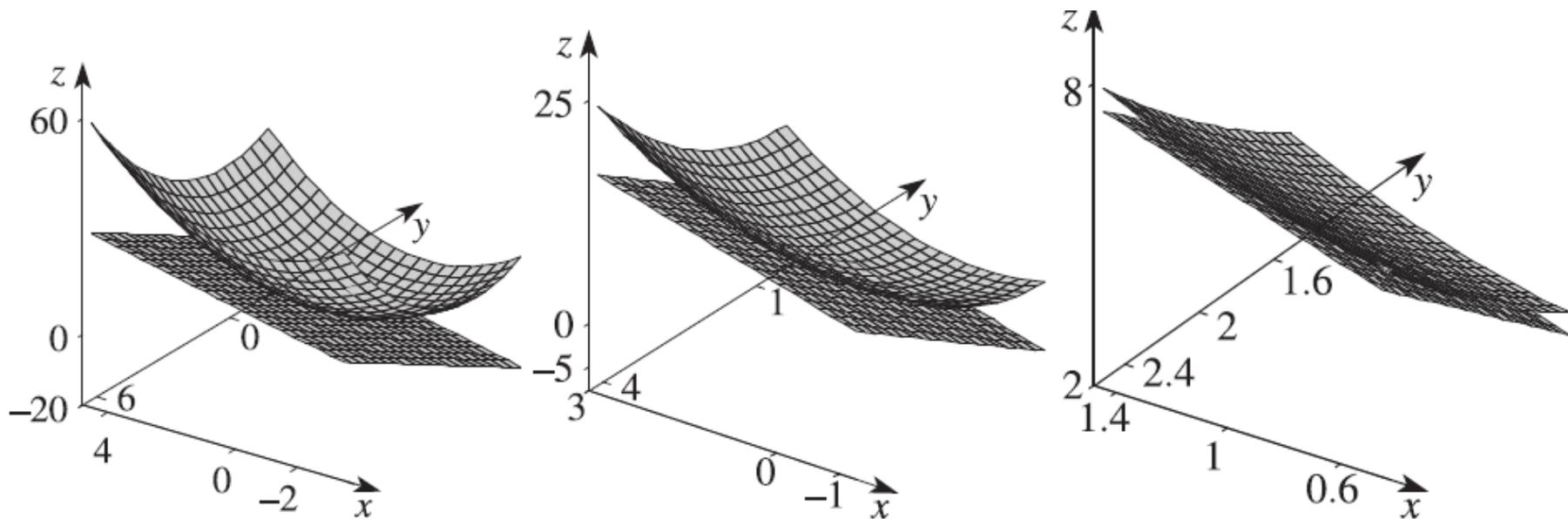
Supposto che una funzione  $f$  sia derivabile nel punto  $(x_0, y_0)$  si dice che essa è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  se, ponendo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

l'errore  $R(h, k)$  soddisfa

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Dal punto di vista grafico, questa proprietà si traduce nel fatto che, riducendo il fattore di scala in ugual modo sui tre assi, i grafici delle funzioni  $f$  ed  $L$  (dove con  $L$  indichiamo il piano tangente) diventano via via indistinguibili



Tre ingrandimenti del grafico della funzione  $z = x^2 + y^2$  e del suo piano tangente  $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$  intorno al punto  $(1, 2, 5)$ . All'aumentare dei fattori di ingrandimento, poiché l'errore  $R$  tende a zero più rapidamente dell'incremento, essi diventano indistinguibili.

# Differenziabilità e approssimazioni lineari

Per esprimere la proprietà

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

utilizzeremo il simbolo di *o* piccolo.

Riformulando la definizione scriveremo:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

Tornando alle variabili  $x = x_0 + h$  e  $y = y_0 + k$  si ha:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$$

Per le funzioni differenziabili, dunque, il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

dista dal grafico di  $f$  per una quantità che va a zero più rapidamente di quanto ci si avvicini al punto. È quindi ragionevole attribuire al piano soprascritto il nome di piano tangente al grafico della funzione  $f$

# Differenziabilità

## Definizione

Se  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  allora il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

si chiama piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

Il vettore

$$N = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$$

Risulta essere ortogonale al piano tangente. Per questa ragione  $N$  viene chiamato vettore normale al grafico di  $f$  in  $P$ .

Se per le funzioni di una variabile abbiamo usato indifferentemente gli aggettivi “derivabile” e “differenziabile”, avremo cura, d’ora in poi, di distinguere accuratamente i due termini, riservando al primo il significato di “derivabile parzialmente”. Il fatto notevole è che *per funzioni di una variabile la differenziabilità è equivalente alla derivabilità*, mentre tale equivalenza è *falsa* per funzioni di più variabili.

Adirittura, vi sono funzioni che posseggono tutte le derivate direzionali ma non sono differenziabili.

# Continuità e Differenziabilità

## Definizione

Data una funzione  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, nelle ipotesi che

- $f$  sia derivabile in  $A$ ;
- $f_x(x, y), f_y(x, y)$  siano continue in  $A$

Allora si dice che  $f$  è di classe  $C^1$  in  $A$  e si scrive

$$C^1(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}: f_x, f_y \text{ sono continue in } A\}$$

## Teorema del differenziale totale

*Se  $f \in C^1(A)$  allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $A$ .*

## Teorema

*Se  $f$  è differenziabile in  $(x, y)$  allora  $f$  è continua in  $(x, y)$ .*

## Dimostrazione

Se  $f$  è differenziabile, vale la seguente, come già visto

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

Passando ai limiti, per la proprietà di linearità, si ha:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x + h, +k) = f(x, y) + f_x(x, y) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} h + f_y(x, y) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} k + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R(h, k)$$

Dalla definizione di differenziabilità

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Inoltre  $h$  e  $k$  tendono a 0 e quindi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x + h, +k) = f(x, y)$$

ovvero  $f$  è continua in  $(x, y)$ .

# Formula del gradiente

## Teorema

Se  $f$  è differenziabile in  $(x, y)$  allora  $f$  ammette derivate direzionali in  $(x, y)$  in ogni direzione. Inoltre, se per ogni versore  $v = (a, b)$  si ha

$$D_v f(x, y) = \nabla f(x, y)v = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Questa relazione prende il nome di *formula del gradiente*.

## Dimostrazione

Scriviamo la formula di differenziabilità per  $h = a\Delta t$  e  $k = b\Delta t$  osservando che  $h^2 + k^2 = (\Delta t)^2(a^2 + b^2) = (\Delta t)^2$ :

$$f(x + a\Delta t, y + b\Delta t) = f(x, y) + f_x(x, y)a\Delta t + f_y(x, y)b\Delta t + o(|\Delta t|)$$

Dividendo per  $\Delta t \neq 0$  e passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ottiene la tesi.

# Significato geometrico del gradiente

La formula del gradiente permette di individuare le *direzioni di massima crescita* e di minima crescita (o di *massima discesa*) di una funzione differenziabile. Infatti si ha

$$D_v f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot v = \|\nabla f(x, y)\| \cos \vartheta$$

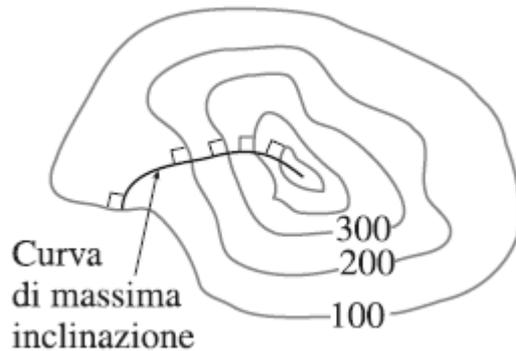
dove  $\vartheta$  è l'angolo formato dai vettori  $v$  e  $\nabla f(x, y)$ .

Si ricava che la derivata direzionale è massima quando  $\cos \vartheta = 1$ , cioè  $\vartheta = 0$ : questo significa che  $v$  è la direzione del gradiente stesso, ovvero il vettore di norma unitaria nella direzione del gradiente

$$v_{max} = \frac{\nabla f(x, y)}{\|\nabla f(x, y)\|}$$

## Proprietà

Se non è nullo, il gradiente di una funzione differenziabile in un punto indica la direzione e il verso di massima pendenza del grafico della funzione nel punto.



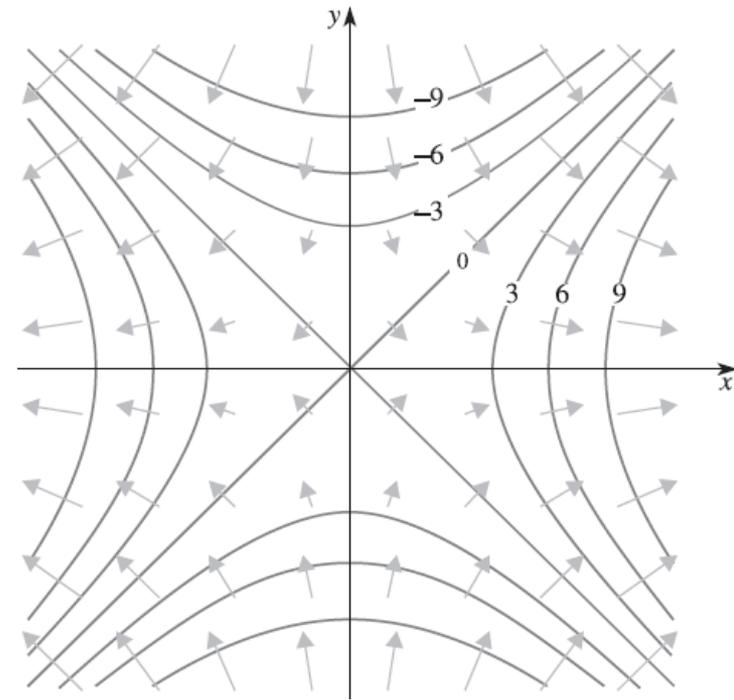
Valutando la derivata direzionale nella direzione del gradiente si trova il valore della massima pendenza, pari a

$$\nabla f(x, y) \cdot v_{max} = \|\nabla f(x, y)\|$$

# Esempio

La figura è stata ottenuta sovrapponendo a una mappa di livello di  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , il grafico dei vettori gradiente calcolati in un reticolo di punti del piano:

si vede bene che i gradienti puntano in salita. Lungo una linea di livello non vi è variazione della funzione; dunque il gradiente di  $f$  in un punto risulta ortogonale alla curva di livello a cui il punto appartiene. Nella direzione opposta al gradiente si realizza la minima pendenza possibile, cioè la massima discesa, mentre la direzione di pendenza nulla (corrispondente a nessuna variazione di quota) si realizza quando  $\cos \vartheta = 0$ , cioè  $\vartheta = \pm\pi/2$  che corrisponde a muoversi in direzione ortogonale a  $\nabla f(x, y)$ .



$f$  differenziabile  $\longleftrightarrow$   $f$  derivabile

$$a = f'(x)$$
$$df(x) = f'(x) \cdot h$$

$f$  continua

# Il Differenziale primo

Secondo la definizione, una funzione  $f$  è differenziabile in un punto  $(x, y)$  se differisce dalla sua linearizzazione per un infinitesimo di ordine superiore all'incremento  $(h, k) = (\Delta x, \Delta y)$ :

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

per  $(h, k) \rightarrow (0,0)$ . Se  $f$  è differenziabile nel punto  $(x, y)$ , il suo incremento  $\Delta f = f(x + h, y + k) - f(x, y)$  si può scrivere come somma di due addendi, una parte lineare negli incrementi  $h$  e  $k$  ed un infinitesimo di ordine superiore.

La parte lineare dell'incremento si chiama differenziale di  $f$  e si indica con  $df$ :

$$df: (h, k) \rightarrow f_x(x, y)h + f_y(x, y)k$$

Il differenziale rappresenta quindi la variazione della quota sul piano tangente al variare del punto secondo l'incremento  $(h, k)$ . In particolare, i differenziali  $dx$  e  $dy$  sono definiti come i differenziali delle funzioni

$$f_1(x, y) = x \text{ e } f_2(x, y) = y$$

Risp, cioè  $dx: (h, k) \rightarrow h$  e  $dy: (h, k) \rightarrow k$ .

Quindi il differenziale  $df$  può essere scritto:

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

