Esercizi su Derivate parziali, differenziabilità e piani tangenti

1. Per le funzioni che seguono, determinare il gradiente della funzione data nel punto indicato e l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto indicato.

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ in $(2,2)$

   (b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ in $(1,1)$

   (c) $f(x,y) = x^y$ in $(1,5)$

2. Determinare la direzione di massima crescita della funzione data nel punto indicato:

   (a) $f(x,y) = \log(x^2 + 3y^2)$ in $(2,1)$

   (b) $f(x,y,z) = xe^{-y^2}\cos(z)$ in $(1,1,\pi)$

   (c) $f(x,y,z) = xyz$ in $(1,1,1)$

   (d) $f(x,y,z) = \sin(x)\cos(yz)$ in $(\pi/2, \sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$

3. Determinare la derivata direzionale della funzione data nel punto indicato e nella direzione specificata

   (a) $f(x,y) = e^{xy}$ in $(1,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

   (b) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ in $(1,2)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

   (c) $f(x,y,z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$ in $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

   (d) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+2y^2+4z^2}$ in $(1,1,1)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Calcolare il vettore gradiente di f in $(0,0)$ e la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Come mai la formula del gradiente non vale?