

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 6 MAGGIO 2020

- PRIMA PARTE

Linearizzazione delle equazioni del moto

Linearizzazione eq. diff:

- soluzione y_E

- $y(t) = y_E + y(t)$

↑
sol
equilibrio

↑
fluttuazione
parametro
che misura
l'ampiezza

→ Possiamo espandere in serie di Taylor
in y e fermarci al primo ordine

Eq. diff non
lineare



Eq. diff lineare

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon) \underline{v} \\ \dot{\underline{v}} = \underline{Q}^L \end{cases}$$

dove

$$\underline{q}(\tau) = \underline{q}_\varepsilon + \gamma \underline{x}(\tau)$$

$$\underline{p}(\tau) = \underline{0} + \gamma \underline{v}(\tau)$$

Eq di Lagrange

$$A(\underline{q}_\varepsilon) \ddot{\underline{x}} = \underline{Q}^L$$

$$A(\underline{q}_\varepsilon) \ddot{\underline{x}} + \text{Hess } V|_{\underline{q}_\varepsilon} \underline{x} = \underline{0}$$

Notiamo che $A(\underline{q}) \rightarrow$ diventa $A(\underline{q}_\varepsilon)$

$$K = K_0 + \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T A(\underline{q}) \underline{\dot{q}}$$

La linearizzazione per le eq. di Lagrange (come conservativo) si può ottenere direttamente da L

$$\tilde{L} = \tilde{K} - \tilde{V} = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^T A(\underline{q}_\varepsilon) \dot{\underline{x}} - \frac{1}{2} \underline{x}^T \text{Hess } V|_{\underline{q}_\varepsilon} \underline{x}$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T A(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \Rightarrow \underline{q} = \underline{q}_\varepsilon + \gamma \underline{x}$$

$$\dot{\underline{q}} = \underline{0} + \gamma \dot{\underline{x}}$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{0} + \gamma \dot{\underline{x}}) A(\underline{q}_E + \gamma \underline{x}) \cdot (\underline{0} + \gamma \dot{\underline{x}})$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} A(\underline{q}_E) \dot{\underline{x}}$$

$$V(\underline{q}) = \underline{V}(\underline{q}_E) + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{\underline{q}_E} \gamma x_i +$$

$$+ \sum \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \bigg|_{\underline{q}_E} \gamma x_i \gamma x_j + \dots$$

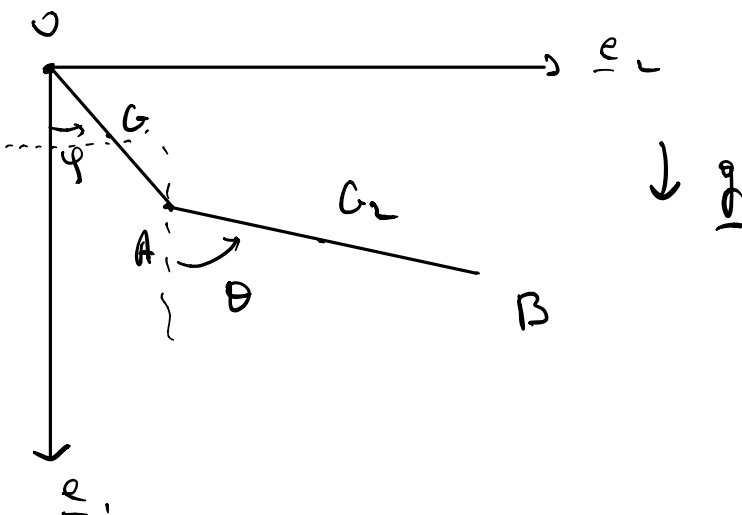
$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \underline{q}_E$$

$$\text{Hess } V \big|_{\underline{q}_E}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{A(\underline{q}_E)}_{\text{conf.}} \ddot{\underline{x}} + \underbrace{\text{Hess } V \big|_{\underline{q}_E}}_{\text{conf.}} \underline{x} = \underline{0}$$

Exercice

Bipendule



$$\overline{OA} = l \quad m$$

$$\overline{AB} = 2l \quad 2m$$

1) Scrivere eq. Lagrange

2) Lineare

$$K = K_{OA} + K_{AB}$$

$$K_{OA} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \dot{\varphi}^2$$

$$K_{AB} = \frac{1}{2} (2m) \|\underline{v}_{G_2}\|^2 + \frac{1}{2} (2m) \frac{(2l)^2}{12} \dot{\theta}^2$$

$$\underline{x}_{G_2} = \left(l \cos \varphi + \frac{2l}{2} \cos \theta \right) \underline{e}_1 + \\ + \left(l \sin \varphi + l \sin \theta \right) \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_{G_2} = \left(-l \sin \varphi \dot{\varphi} - l \sin \theta \dot{\theta} \right) \underline{e}_1 \\ + \left(l \cos \varphi \dot{\varphi} + l \cos \theta \dot{\theta} \right) \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_{G_2}^2 = l^2 \left[\sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta \right. \\ \left. + \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2 \cos \varphi \cos \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} \right] \\ = l^2 \left[\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right]$$

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{7}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3} \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right]$$

$$V_2 = m g \frac{l}{2} \cos \varphi - 2m g \left(l \cos \varphi + \frac{2l}{2} \cos \theta \right) \\ = -m g l \left(\frac{5}{2} \cos \varphi + 2 \cos \theta \right)$$

Derivi:

$$L = K - V = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{7}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3} \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right) + m g l \left(\frac{5}{2} \cos \varphi + 2 \cos \theta \right)$$

Equazioni di Lagrange (φ, θ)

$$\varphi) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{7}{3} 2 \dot{\varphi} + 4 \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right] \right) + \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2} m l^2 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) - m g l \frac{5}{2} \sin \varphi \right) \\ &= m l^2 \left[\frac{7}{3} \ddot{\varphi} + 2 \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) - 2 \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \right] \\ &\quad + 2 m l^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) + \frac{5}{2} m g l \sin \varphi \\ &= m l^2 \left(\frac{7}{3} \ddot{\varphi} + 2 \ddot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right) + m l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) \\ &\quad + \frac{5}{2} m g l \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

eq. Lagrange
per φ

$$\theta) \quad L = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{7}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3} \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right) + m g l \left(\frac{5}{2} \cos \varphi + 2 \cos \theta \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 = \frac{d}{dt} \left[m l^2 \left(\frac{8}{3} \dot{\theta} + 2 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) \right) \right] \\
&- \left(2 m l^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) - 2 m g l \sin \theta \right) \\
&= m l^2 \left(\frac{8}{3} \ddot{\theta} + 2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - 2 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) (\dot{\varphi} - \dot{\theta}) \right) \\
&- 2 m l^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\varphi - \theta) + 2 m g l \sin \theta \\
&= \left[m l^2 \left(\frac{8}{3} \ddot{\theta} + 2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) \right) + \right. \\
&\quad \left. - 2 m l^2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \theta) + 2 m g l \sin \theta = 0 \right]
\end{aligned}$$

eq. di Lagrange
per θ

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 6 MAGGIO 2020

— SECONDA PARTE

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{7}{3} \dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3} \dot{\theta}^2 + 4 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta) \right) + \\
&+ m g l \left(\frac{5}{2} \cos \varphi + 2 \cos \theta \right)
\end{aligned}$$

Linearizziamo $\rightarrow \varphi_e = 0, \theta_e = 0$

$$\varphi = \gamma \dot{r}_1, \quad \theta = \gamma \dot{r}_2$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{7}{3} \dot{r}_1^2 + \frac{8}{3} \dot{r}_2^2 + 4 \dot{r}_1 \dot{r}_2 \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} A(\underline{r}_c) \frac{d}{dt} \right)$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \underline{\dot{r}} \cdot \text{Hess } V|_{\underline{r}_c} \underline{\dot{r}}$$

$$V = -mgl \left(\frac{5}{2} \cos \varphi + 2 \cos \theta \right) \quad \checkmark \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{Hess } V = \begin{pmatrix} mgl \frac{5}{2} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 2mgl \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } V|_{\underline{r}_c} = \begin{pmatrix} mgl \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2mgl \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \rightarrow$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \underline{\dot{r}} \text{Hess } V|_{\underline{r}_c} \underline{\dot{r}} = \frac{1}{2} mgl \left(\frac{5}{2} \dot{r}_1^2 + 2 \dot{r}_2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{r}_1 \ \dot{r}_2) \begin{pmatrix} mgl \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K} = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{7}{3} \dot{r}_1^2 + \frac{8}{3} \dot{r}_2^2 + 4 \dot{r}_1 \dot{r}_2 \right)$$

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} m l \left(\frac{5}{2} \dot{r}_1^2 + 2 \dot{r}_2^2 \right)$$

$$\tilde{L} = \tilde{K} - \tilde{V}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\hat{\tau}}_{1,2}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \hat{\tau}_{1,2}} = 0$$

$$\begin{cases} m l^2 \left(\frac{7}{3} \ddot{\hat{\tau}}_1 + 2 \ddot{\hat{\tau}}_2 \right) + m g l \frac{5}{2} \hat{\tau}_1 = 0 \\ m l^2 \left(2 \ddot{\hat{\tau}}_1 + \frac{8}{3} \ddot{\hat{\tau}}_2 \right) + 2 m g l \hat{\tau}_2 = 0 \end{cases}$$

eq. di Lagrange linearizzate attorno alle
soluzioni di equilibrio

Esempio lineareizzazione per piccoli
rotazioni permanenti

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} \omega_i = \omega_0 \\ \omega_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

consideriamo le rotazioni permanenti attorno
all'asse 1:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 + \gamma \hat{\tau}_1 \\ \omega_2 &= \gamma \hat{\tau}_2 \\ \omega_3 &= \gamma \hat{\tau}_3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} J_1 \gamma \dot{\hat{\tau}}_1 = (J_2 - J_3) \gamma^2 \hat{\tau}_2 \hat{\tau}_3 \\ J_2 \gamma \dot{\hat{\tau}}_2 = (J_3 - J_1) (\omega_0 + \gamma \hat{\tau}_1) \gamma \hat{\tau}_3 \end{cases}$$

$$J_3 \dot{\tau}_3 = (J_1 - J_2) (\omega_0 + \gamma \tau_1) \gamma \tau_2$$

→ Termini lineari in γ

$$\begin{cases} J_1 \dot{\tau}_1 = 0 \\ J_2 \dot{\tau}_2 = (J_3 - J_1) \omega_0 \tau_3 \\ J_3 \dot{\tau}_3 = (J_1 - J_2) \omega_0 \tau_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eq.} \\ \text{Euler} \\ \text{linearizzate} \end{array}$$

Combiniamo le ultime due eq. in una

$$J_2 \ddot{\tau}_2 = (J_3 - J_1) \omega_0 \dot{\tau}_3 = \frac{(J_3 - J_1)(J_1 - J_2)}{J_3} \omega_0^2 \tau_2$$

$$\rightarrow \ddot{\tau}_2 + \gamma \tau_2 = 0$$

• Se $J_1 = \max(J_1, J_2, J_3)$ o $J_1 = \min(J_1, J_2, J_3)$

$$(J_3 - J_1)(J_1 - J_2) < 0$$

→ eq. moto armonico e $\tau_2(t)$

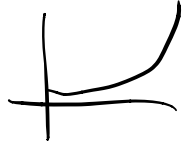
è sinusoidale, lo stesso vale per $\tau_3(t)$

⇒ la rotazione è stabile (linearmente)

• Altrimenti $(J_3 - J_1)(J_1 - J_2) > 0$

→ $f_2(\tau)$ è una combinazione di
esponenziali

$$f_2(\tau) \sim \alpha_1 e^{a\tau} + \alpha_2 e^{-a\tau}$$



la rotazione è
instabile
(linearmente)

Stabilità lineare

linearizzare un problema non-lineare,
proviamo delle informazioni approssimate

Stabilità lineare = la soluzione del
problema linearizzato è stabile

In generale stabilità lineare ~~≠~~ stabilità

Però in alcuni casi possiamo trarre qualche
conclusione.

Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$$\underline{F}(\underline{y}_E) = \underline{0}$$

Cambiamo variabile $\underline{y}(t) = \underline{y}_e + \gamma \underline{\xi}(t)$

$$\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \Rightarrow \gamma \dot{\underline{\xi}}(t) = \underline{F}(\underline{y}_e + \gamma \underline{\xi}(t)) =$$

sviluppiamo in serie

$$= \cancel{\underline{F}(\underline{y}_e)} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \underline{F}(\underline{y}_e + \gamma \underline{\xi}) \right) \Big|_{\gamma=0}$$

$$+ \mathcal{O}(\gamma^2)$$

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{F}_L(\underline{\xi})$$

$$\underline{F}_L(\underline{\xi}) = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{y}} \underline{F}(\underline{y}_e + \gamma \underline{\xi}) \right) \Big|_{\gamma=0}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_e + \gamma \underline{\xi}(t)$$

$$\underline{y}_0 = \underline{y}(0) = \underline{y}_e + \gamma \underbrace{\underline{\xi}(0)}_a$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{\xi}}(t) = \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \underbrace{\mathcal{O}(\gamma^2)}_{\varepsilon(\gamma, t)} \\ \underline{\xi}(0) = a \end{cases}$$

Teniamo termini
di ordine $\mathcal{O}(\gamma^2)$

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \underline{F}_L(\underline{z}) \\ \underline{z}(0) = a \end{cases}$$

Tralasciamo
termini di
ordine $\mathcal{O}(\gamma^2)$
→ linearizzato

la soluzione $\underline{\gamma}(T)$ (sol del sistema lineare) è una buona approssimazione per $\underline{\xi}(T)$ (sol sistema con $z(\gamma, \xi)$)
 se $z(\gamma, \xi)$ può essere trascurato rispetto a $\underline{F}_L$.

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 6 MAGGIO 2020

— TERZA PARTE

Sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$$\underline{\gamma}(t) = \underline{\gamma}_E + \underline{\gamma} \underline{\xi}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{\xi}}(t) = \underline{F}_L(\underline{\xi}) + \underline{z}(\underline{\gamma}) \\ \underline{\xi}(0) = \underline{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{F}_L(\underline{\gamma}) \\ \underline{\gamma}(0) = \underline{a} \end{cases}$$

variabile di variabile

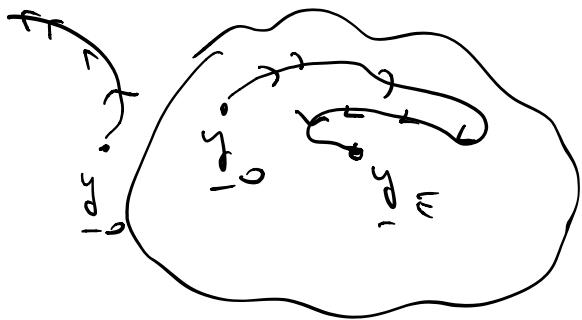
Criterio: se la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$ del sistema linearizzato è instabile $\Rightarrow$ la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$ ($\Rightarrow \underline{y} = \underline{y}_E$) del sistema dinamico è instabile

Def Dato il sistema dinamico $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$ (con $\underline{F}(\underline{y}_E) = \underline{0}$), diciamo che $\underline{y}_E$ è asintoticamente stabile (nel futuro)

se $\exists$ $\mathcal{U}$ intorno di $\underline{y}_E$ Tale che per ogni dato iniziale $\underline{y}_0 \in \mathcal{U}$, si ha

$$\underline{y}(\tau, \underline{y}_0) \longrightarrow \underline{y}_E$$

$$\tau \longrightarrow +\infty$$



$\mathcal{U}$ = barino di attrazione

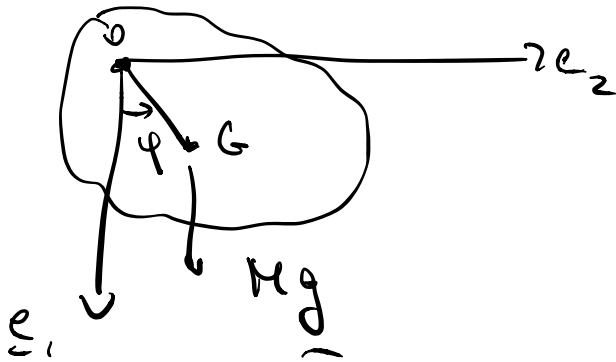
Teorema (Criterio di stabilità asintotica)
se $\underline{x} = \underline{0}$ soluzione del sistema

dinamico lineare e asintoticamente
 stabile, allora $\xi = 0$ soluzione del
 sistema dinamico e asintoticamente
 stabile

Stabile lineare $\nrightarrow$ Stabile

Stabile asintotico
 lineare $\rightarrow$ Stabile
 asintotico

Esempio Pendolo con attrito



$$\overline{OG} = d$$

$$I_o = I_{G,0}$$

$- \ddot{\varphi} \leq 3$ per
 momento di attrito

Allora: equazione del moto esatta

$$\ddot{\varphi} = - c \sin \varphi - 2v\dot{\varphi}$$

$$c = \frac{Mgd}{I_o} \qquad 2v = \frac{\gamma}{I_o}$$

Consideriamo l'eq a $\varphi \approx 0$

Ponendo $\varphi = \eta \xi$, l'eq. esatta

$$\eta \ddot{\xi} = -c \sin(\eta \xi) - 2\nu \eta \dot{\xi}$$

$$\rightarrow \ddot{\xi} = -c \xi - 2\nu \dot{\xi} + z(\eta)$$

$$z(\eta) = c \frac{\eta \xi - \sin(\eta \xi)}{\eta}$$

Poniamo

$$y_1 = \xi$$

$$y_2 = \dot{\xi}$$

$\Rightarrow$

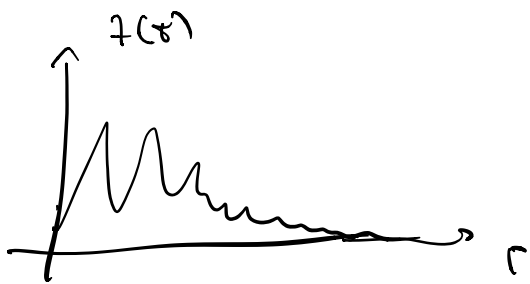
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -c y_1 - 2\nu y_2 + z(\eta) \end{cases}$$

$$\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$$

$$\ddot{\tau} = -c \tau - 2\nu \dot{\tau}$$

$\tau > 0$. Per $c > 0$ $\Rightarrow$ tutte le soluzioni

decadono a zero per $t \rightarrow +\infty$



$\tau > 0$ è asintoticamente stabile

Allora dal Teorema segue che anche $\varphi > 0$ è asintoticamente stabile

→ Linearizzare un sistema dinamico /
le eq. di Laplace

Richiami su eq. diff 2nd ordine, e
coefficienti costanti

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + c y = 0$$

Prendiamo $y(t) = e^{kt}$ k costante

e sostituiamo

$$(a k^2 + b k + c) e^{kt} = 0 \quad \text{solo}$$

se $(a k^2 + b k + c) = 0$ $\text{eq. caratteristica}$

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}$$

• 1° caso $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow k_1 \text{ e } k_2$

sono reali e distinti:

$$\rightarrow y(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}$$

↑
fissate dai dati
iniziali

• 2° caso $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow k_1 \text{ e } k_2$

sono complessi coniugati:

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$k_1 = \alpha + i\beta$$

$$e^{k_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$e^{k_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

$$\rightarrow y(t) = \underline{e^{\alpha t}} \left[\underline{c_1} \cos \beta t + \underline{c_2} \sin \beta t \right]$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

• 3° caso $b^2 = 4ac \rightarrow k_1 = k_2 = -\frac{b}{2a}$

$$\rightarrow y(t) = c_1 e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 t e^{-\frac{bt}{2a}}$$

$$= \underline{(c_1 + c_2 t)} e^{-\frac{b}{2a} t}$$