PROBLEMA DEI GRANDI LOGARITMI E RUNNING COUPLING [Sc.5.2]

Riprendiamo il nostro risultato per $\varphi\varphi \to \varphi\varphi$

$$\mathcal{M}_{12\to 34}(s,t,u) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx \left[\log\frac{m^2 - s\,x(1-x)}{m^2 - 4m^2 x(1-x)} + \log\frac{m^2 - t\,x(1-x)}{m^2} + \log\frac{m^2 - u\,x(1-x)}{m^2}\right]$$

Per $|s,t,u| \gg m^2$:

$$\mathcal{M}_{12\to 34} \sim -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{-s}{m^2} + \log\frac{-t}{m^2} + \log\frac{-u}{m^2} - 4\right]$$

(le parti immaginarie generate sono aspettate dal teorema ottico, non influiscono la discussione)

Per energie sufficientemente alte, il grande logaritmo $\log E^2/m^2 \gg 1$ può compensare il fattore di loop $\lambda^2/32\pi^2$ e rovinare l'espansione perturbativa.

A 2 loop ci si aspetta $\sim \frac{1}{(16\pi^2)^2}\lambda^3\left(\log\frac{E^2}{m^2}\right)^2$.

Se $\frac{\lambda}{16\pi^2}\log\frac{E^2}{m^2} \sim 1 \Rightarrow$ tutti i LEADING LOG ad ogni loop contribuiscono egualmente.

$\Rightarrow$ La soluzione è di scegliere un'altra scala di rinormalizzazione $\mu \sim \sqrt{s}$.

Per esempio possiamo fissare la condizione:

$$i\mathcal{M}(s=t=u=-\mu^2) \equiv -i\lambda(\mu)$$

mostriamo esplicitamente la dipendenza dell'accoppiamento rinormalizzato da μ.

$$\Rightarrow \quad -i\lambda + (i\lambda)^2 i\, 3V(-\mu^2) - i\delta_\lambda = -i\lambda$$

$$\hookrightarrow \quad \delta_\lambda = -\lambda^2\, 3V(-\mu^2)$$

$$\mathcal{M}_{12\to34}(s,t,u) = -\lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{32\pi^2}\int_0^1 dx \left[\log\frac{m^2 - s\,x(1-x)}{m^2+\mu^2 x(1-x)} + (s\to t) + (s\to u)\right]$$

Adesso per $\mu \sim \sqrt{s}$ non abbiamo più grandi log.

Per $|s|, |t|, |u| \gg m^2$:

$$\mathcal{M}_{12\to34} \simeq -\lambda(\mu) - \frac{\lambda^2(\mu)}{32\pi^2}\left(\log\frac{-s}{\mu^2} + \log\frac{-t}{\mu^2} + \log\frac{-u}{\mu^2}\right)$$

λ dipende dalla scala μ alla quale rinormalizziamo la teoria, ma la fisica deve essere indipendente da questa scelta:

$$\mu \frac{d\mathcal{M}}{d\mu} = \left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \underbrace{\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}}_{\text{funzione-}\beta} \frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\mathcal{M} = 0$$

$$\boxed{\beta\left(\lambda, \frac{m}{\mu}\right) \equiv \mu \frac{d\lambda}{d\mu}}$$

Equazione del gruppo di rinormalizzazione di λ } RG

Dall'espressione di $\mathcal{M}$ otteniamo:

$$\boxed{\beta\left(\lambda, \frac{m}{\mu}\right) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \, \frac{\mu^2 x(1-x)}{m^2 + \mu^2 x(1-x)} + O(\lambda^3)}$$

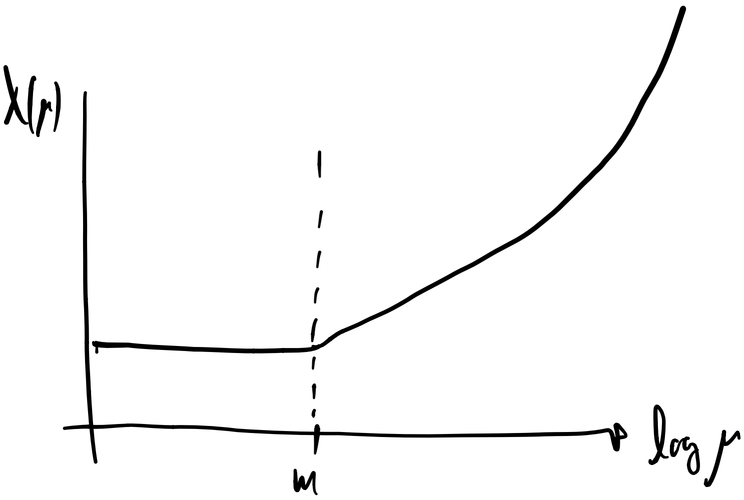
per $\mu^2 \gg m^2$ $\qquad \beta_{UV} \simeq \dfrac{3\lambda^2}{16\pi^2}$

per $\mu^2 \ll m^2$ $\qquad \beta_{IR} \simeq \dfrac{3\lambda^2}{32\pi^2} \dfrac{\mu^2}{m^2} \to 0$

La soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione è

$$\lambda_{UV}(\mu) \simeq \frac{\lambda(\mu_0)}{1-\frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2}\log\frac{\mu}{\mu_0}} \qquad \text{per} \quad \mu,\mu_0 \gg m$$

$$\lambda_{IR}(\mu) \simeq \text{costante} \qquad \text{per} \quad \mu \ll m$$



Vediamo come abbiamo risolto il problema dei grandi logaritmi.

Prendiamo una configurazione (ideale) $s=t=u=-C^2 \gg m^2$

SENZA RG:

$$\mathcal{M}_{12\to34} \simeq -\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\log\frac{C^2}{m^2} + O(\lambda^2)$$

CON RG:

$$\mathcal{M}_{12\to34} \simeq \lambda(C) \simeq \frac{-\lambda}{1-\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\log\frac{C^2}{m^2}} = -\lambda\left(1+\frac{3\lambda}{16\pi^2}\log\frac{C^2}{m^2}+\left(\frac{3\lambda}{16\pi^2}\log\frac{C^2}{m^2}\right)^2+\dots\right)$$

Il gruppo di rinormalizzazione ha RISOMMATO tutti i LEADING LOG, migliorando l'espansione perturbativa.

Riprendiamo la soluzione del gruppo di rinormalizzazione per $\mu \gg m$:

$$\lambda_{UV}(\mu) \simeq \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2}\log\frac{\mu}{\mu_0}}$$

POLO DI LANDAU

$\Rightarrow$ Diverge per $\frac{3\lambda(\mu_0)}{16\pi^2}\log\frac{\mu_L}{\mu_0} = 1$

ovvero alla scala $\mu_L = \mu_0\, e^{\frac{16\pi^2}{3\lambda(\mu_0)}}$

La divergenza è non fisica, in quanto quando $\lambda(\mu)$ diventa grande, l'espansione perturbativa perde senso.

D'altro canto, per $m=0$, nell'infrarosso abbiamo

$$\lim_{\mu\to 0} \lambda_{IR}(\mu) \to 0$$

$\Leftarrow$ La teoria è asintoticamente LIBERA NELL'IR.
(IR free)

Teorie con $\beta(\lambda) < 0$, invece, sono UV free, ma diventano non perturbative a basse energie.
La QCD è una teoria di questo tipo.

Schema "MINIMAL SUBTRACTION" MS e $\overline{MS}$

[Se.5.5]

Nello schema MS i controtermini vengono fissati per riassorbire solamente il termine divergente $\frac{1}{\varepsilon}$:

$$-i\lambda^2\left(V(s)^{div}+V(t)^{div}+V(u)^{div}\right)-i\delta_\lambda \equiv 0$$

dove:

$$V(p^2)^{div} = \frac{-1}{32\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \delta_\lambda^{MS} = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2}\frac{2}{\varepsilon}$$

In $\overline{MS}$ si includono anche i termini $-\gamma+\log 4\pi$

$$\Rightarrow \delta_\lambda^{\overline{MS}} = \frac{3\lambda^2(\mu)}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\log 4\pi\right)$$

Quindi si ha:

$$\mathcal{M}^{\overline{MS}}_{12\to34}(s,t,u) = -\lambda(\mu)-\frac{\lambda^2(\mu)}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left[\log\frac{m^2-s\,x(1-x)}{\mu^2}+(s\to t)+(s\to u)\right]$$

Dato che la scala μ è non fisica (viene da $\lambda\to\lambda\mu^\varepsilon$ in $d=4-\varepsilon$), la fisica non deve dipendere da μ:

$$\mu\frac{d\mathcal{M}}{d\mu} = \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\mathcal{M} = 0 \quad , \quad \beta(\lambda)\equiv\mu\frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(\lambda)_{\overline{MS}} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}}$$

(È indipendente da m.