

MECCANICA RAZIONALE

- LEZIONE DEL 8 MAGGIO 2020

- PRIMA PARTE

$$\rightarrow \underline{y} = \underline{F}(\underline{y}) \quad \underline{y} = (\underline{q}, \underline{p}) \quad 1^{\circ} \text{ ordine}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \quad 2^{\circ} \text{ ordine}$$

linearizzazione

$$\dot{\underline{y}} = \underline{L} \underline{y}$$

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$

Idea : $A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\leadsto \begin{cases} a_1 \ddot{x}_1 + b_1 \ddot{x}_2 + \dots + a_1 x_1 + b_1 x_2 \dots = 0 \\ a_2 \ddot{x}_1 + b_2 \ddot{x}_2 + \dots \dots \dots = 0 \end{cases}$$

$$A \cdot \ddot{\underline{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad A \ddot{\underline{z}} + C \underline{z} = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 coordinate ξ tali che

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = 0 \quad \hookrightarrow \quad \ddot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$\underline{x} \longrightarrow \underline{\xi} \quad \text{coordinate nuove}$$

SISTEMI MECCANICI LINEARI

$$\dot{\underline{y}} = L \underline{y} \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

$\rightarrow$ trovare n -soluzioni linearmente indipendenti

Cerchiamo soluzioni $\underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t}$
 $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ costante

$$\lambda \underline{u} e^{\lambda t} = L \underline{u} e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad L \underline{u} = \lambda \underline{u}$$

λ autovalore di L

$\underline{u}$ autovettore di L

$$\left. \begin{array}{l} \underline{y} = \underline{u} e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \text{ soluzione} \end{array} \right\}$$

Se L ha n autovettori indipendenti

$$\underline{u}^{(1)}, \dots, \underline{u}^{(n)} \quad \left(\underline{u} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

la soluzione generale

$$\underline{y}(t) = c_1 \underline{u}^{(1)} e^{\lambda^{(1)} t} + c_2 \underline{u}^{(2)} e^{\lambda^{(2)} t} + \dots \\ \dots + c_n \underline{u}^{(n)} e^{\lambda^{(n)} t}$$

$\lambda^{(i)}$ è autovale di $\underline{u}^{(i)}$

$$L = K - V$$

per un sistema meccanico
ad l gradi di libertà

$$K = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^T A \dot{\underline{x}}$$

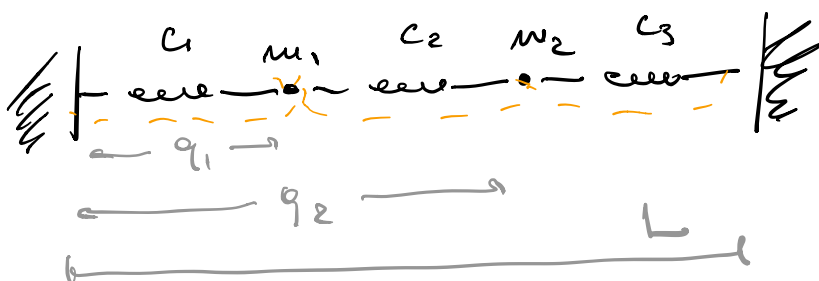
A, C matrici
simmetriche

$$V = \frac{1}{2} \underline{x}^T C \underline{x}$$

$$\hookrightarrow A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$

però come il
prodotto di
una linearizzazione

Esempio



$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$V = \frac{c_1}{2} q_1^2 + \frac{c_2}{2} (q_2 - q_1)^2 + \frac{c_3}{2} (L - q_2)^2$$

$$L = K - V \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1,2$$

$$\cdot \frac{d}{dt} (m_1 \dot{q}_1) + \frac{\partial V}{\partial q_1} = m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0$$

$$\cdot \frac{d}{dt} (m_2 \dot{q}_2) + \frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) - c_3 (L - q_2)$$

$$\frac{1}{2} m_2 \ddot{q}_2 + (c_2 + c_3) q_2 - c_2 q_1 - c_3 L = 0$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 + (c_2 + c_3) q_2 - c_2 q_1 - c_3 L = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A} \underline{\ddot{q}} + \underline{C} \underline{q} = \underline{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 L \end{pmatrix}$$

Equilibrium: $\underline{C} \underline{q}_E = \underline{b}$

$$\begin{cases} (c_1 + c_2) q_{1,E} - c_2 q_{2,E} = 0 \\ (-c_2) q_{1,E} + (c_2 + c_1) q_{2,E} = c_3 L \end{cases}$$

Scegliamo nuove incognite: le posizioni delle due masse rispetto alla posizione di equilibrio

$$\underline{x} = \underline{q} - \underline{q}_E$$

$$\begin{cases} x_1 = q_1 - q_{1,E} \\ x_2 = q_2 - q_{2,E} \end{cases}$$

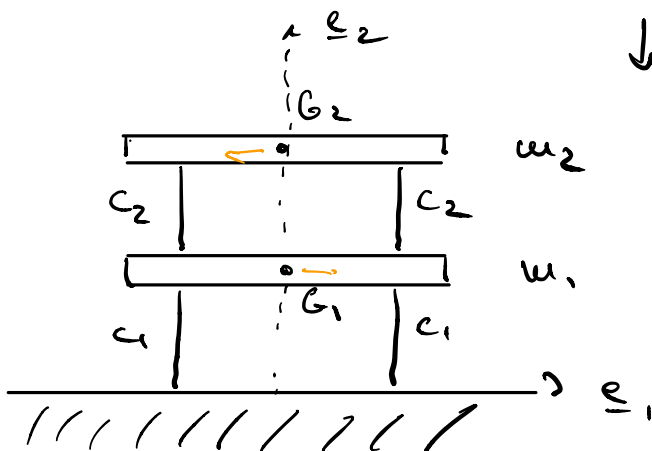
Allora $A \ddot{\underline{q}} + C \underline{q} - \underline{b} = A \ddot{\underline{x}} + C (\underline{q}_E + \underline{x}) - \underline{b}$

$$\Rightarrow A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} + \underbrace{(C \underline{q}_E - \underline{b})}_{=0} = \underline{0}$$

condizione
equilibrio

$$\Rightarrow A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$

Esempio Carica e due prismi



x_1 spostamento orizzontale di G_1

x_2 spostamento orizzontale di G_2

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2} (2c_1) x_1^2 + \frac{1}{2} (2c_2) (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) + \frac{\partial V}{\partial x_1} = m \ddot{x}_1 + 2c_1 x_1 + 2c_2 (x_1 - x_2)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}_2) + \frac{\partial V}{\partial x_2} = m \ddot{x}_2 - (2c_2) (x_1 - x_2)$$

Abbiamo: $A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2(c_1 + c_2) & -2c_2 \\ -2c_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo imporre o risolvere sistemi omogenei

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$

MECCANICA RAZIONALE

— LEZIONE DEL 8 MAGGIO 2020

— SECONDA PARTE

Diversi problemi $\rightarrow A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$

Schemi generale di risoluzione pone
all'ovvero il seguente risultato:

Teorema (coordinate normali)

Sia dato

$$K = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^T A \dot{\underline{x}}$$

A simmetrica, reale e
def. positiva

$$V = \frac{1}{2} \underline{x}^T C \underline{x}$$

C simmetrico e reale

Allora esiste una trasformazione di
coordinate lineare e invertibile

$\underline{x}$
coordinate
fisiche $\longleftrightarrow$ $\underline{\xi}$
coordinate
normali

Tali che nelle $\underline{\xi}$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\xi}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{\xi}}^T \mathbf{1}_{l \times l} \dot{\underline{\xi}}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \gamma_i \xi_i^2 = \frac{1}{2} \underline{\xi}^T \tilde{C} \underline{\xi} \quad \text{dove } \tilde{C} \text{ è diagonale}$$

Nelle coordinate normali
le eq. di moto sono

$$\ddot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = 0$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & \\ & \gamma_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \gamma_l \end{pmatrix}$$

Dim

1. Prendiamo S_1 la trasformazione
(ortogonale perché A simmetrica)
che diagonalizza A

$$\underline{x} \longrightarrow \underline{y} \quad (\underline{x} = S_1 \underline{y})$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \mu_i \dot{y}_i^2$$

$\mu_i > 0$ autovalori
(A def +)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l V_{ij} y_i y_j$$

$$V = S_1^T C S_1$$

notiamo V simmetrica : $V^T = S_1^T C (S_1^T)^T = V$

2. Prendiamo S_2 la trasformazione che
riscale le y_i di un fattore $\sqrt{\mu_i}$

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} z_i$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{z}_i^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}} z_i z_j$$

3. Siccome $\frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}}$ è simmetrica, la

possiamo diagonalizzare con una trasformazione
ortogonale

$$z \rightarrow \underline{\xi} \quad (z = S_3 \underline{\xi})$$

$$\rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \dot{\underline{\xi}}_i^2 \quad S_3^T S_3 = 1$$

$$\rightarrow V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \gamma_i \dot{\underline{\xi}}_i^2 \quad \gamma_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, l$$

$$\underline{x} = (S_1 S_2 S_3) \underline{\xi} = S \underline{\xi} \quad \text{c.w.d.}$$

Conseguenza : $\ddot{\underline{\xi}}_i + \gamma_i \dot{\underline{\xi}}_i = 0$ è risolta

da $\underline{v}^{(i)} e^{\lambda_i \tau}$ con $\lambda_i^2 + \gamma_i = 0$

$$\text{e } \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \pm 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-esima componente}$$

$$(\underline{v}^{(i)})_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \rightarrow \underline{\text{modi}} \\ \underline{\text{normali}}$$

Abbiamo i seguenti casi

$$\bullet \gamma_i > 0 \quad , \quad \text{poniamo } \gamma_i = \omega_i^2 \quad \omega_i > 0$$

$$\text{allora } \lambda_i^2 + \omega_i^2 = 0 \rightarrow \lambda_i = \pm i \omega_i$$

$$\text{per cui } e^{\lambda_i \tau} = e^{\pm i \omega_i \tau} = \cos \omega_i \tau \pm i \sin \omega_i \tau$$

soluzioni $\underline{v}^{(i)} \sin \omega_i \tau, \underline{v}^{(i)} \cos \omega_i \tau$

- $\gamma_i < 0$, poniamo $\gamma_i = -\nu_i^2$ $\nu_i > 0$

$$\lambda_i^2 - \nu_i^2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = \pm \nu_i$$

e quindi $e^{\lambda_i \tau} = e^{\pm \nu_i \tau}$

allora le soluzioni sono $\forall i$

$$\underline{v}^{(i)} e^{\nu_i \tau}, \underline{v}^{(i)} e^{-\nu_i \tau}$$

- $\gamma_i = 0 \Rightarrow \ddot{\xi}_i(\tau) = 0$

soluzioni $\underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(i)} \tau$

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0} \rightarrow \underline{\ddot{\xi}}_i + \gamma_i \underline{\xi}_i = 0 \quad i=1, \dots, l$$

$\left \begin{array}{l} \rightarrow \cdot \gamma_i > 0 \\ \rightarrow \cdot \gamma_i < 0 \\ \rightarrow \cdot \gamma_i = 0 \end{array} \right.$	• $\gamma_i > 0$	$\underline{v}^{(i)} \cos \omega_i \tau, \underline{v}^{(i)} \sin \omega_i \tau$	$\lambda_i = \pm i \omega_i$
	• $\gamma_i < 0$	$\underline{v}^{(i)} e^{\nu_i \tau}, \underline{v}^{(i)} e^{-\nu_i \tau}$	$\gamma_i = -\nu_i^2$
	• $\gamma_i = 0$	$\underline{v}^{(i)}, \underline{v}^{(i)} \tau$	

Stabilità delle soluzioni stazionarie

$$\underline{\xi} = \underline{0} \quad (\Rightarrow \underline{x} = \underline{0}) \quad \left[\underline{x} = (s_1 s_2 s_3) \underline{\xi} \right]$$

• se tutte $\gamma_i > 0 \quad \forall i=1, \dots, n \Rightarrow \underline{x}$ è stabile (linearmente)

perché tutte le soluzioni oscillano

(Notiamo : se tutti i γ_i sono positivi allora la matrice V è definita positiva $\frac{V_{ij}}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}}$

$\rightarrow$ sistema di Dirichlet : $\underline{x} = 0$ è un minimo)

Tomiamo alle coordinate $\underline{x}$ finite

$$\underline{x} = S \underline{\xi}$$

$$\ddot{\xi}_i + \gamma_i \xi_i = 0$$

$$A \ddot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$