Osservazioni sul teorema di Schwarz

È noto il seguente teorema attribuito a Schwarz:

Sia f una funzione definita in un aperto A di $\mathbb{R}^2$; supponiamo che in un intorno di un punto $P_o \in A$ esistano le derivate seconde miste di f e siano continue in P_o. Allora risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_o)$$

(Spesso gli studenti enunciano il teorema in maniera un po' sbrigativa dicendo che *le derivate seconde miste sono uguali in tutti i punti dove sono continue*).

Le ipotesi fatte sulla contunità delle derivate seconde possono essere in parte attenuate, ma non eliminate del tutto. Consideriamo infatti il seguente esempio dovuto a Peano.

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Non è difficile osservare che tale funzione è continua in $(0,0)$. Le derivate parziali prime sono chiaramente nulle in $(0,0)$, mentre fuori dell'origine esse valgono rispettivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Un facile calcolo mostra che le derivate seconde miste nell'origine valgono rispettivamnente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Non si applica quindi il teorema di Schwarz; ciò non deve stupire in quanto fuori dell'origine risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Tali derivate non sono evidentemente continue in $(0,0)$ (sull'asse x valgono 1 e sull'asse y valgono -1).