Fotogrammetria Analitica

Il problema fotogrammetrico

- Acquisizione di immagini dell’oggetto da rilevare

    - Ricostruzione matematica delle posizione delle immagini al momento dello scatto

        - Calcolo delle coordinate di molti punti dell’oggetto

Problemi da risolvere

- Definizione (e materializzazione) sistema di riferimento oggetto
- Relazione geometrica tra punti oggetto e punti immagine
- Struttura del blocco di immagini (copertura oggetto)
- Definizione (e materializzazione) del sistema riferimento sulle immagini
- Orientamento delle immagini: punti di appoggio e metodi di calcolo
- Determinazione delle coordinate di molti punti (restituzione)

Principi geometrici

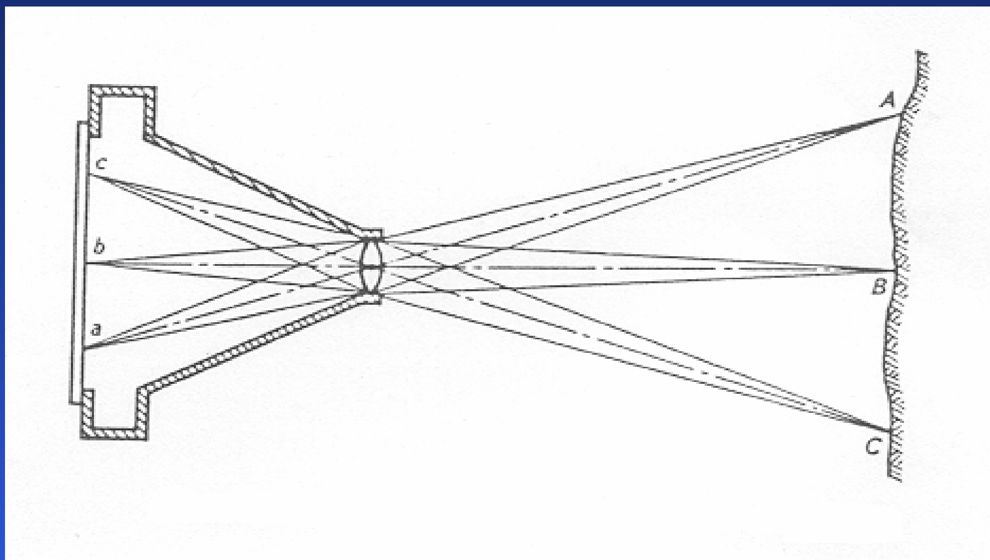
- L’immagine è una proiezione centrale dello spazio (3D) su un piano (2D)

  - Una sola immagine non è sufficiente a ricostruire l’oggetto (2D ➔ 3D)

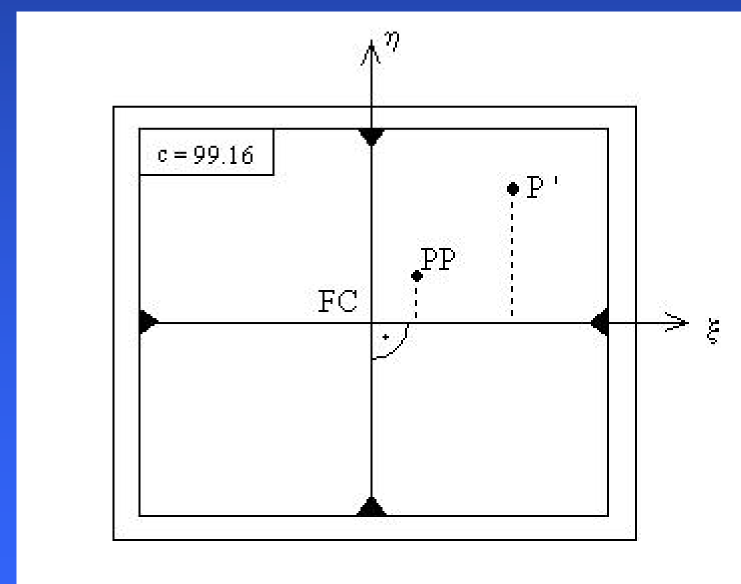
    - Occorrono più immagini per ricostruire, per intersezione, l’oggetto

      almeno 2, se di più ➔ osservazioni ridondanti

Principi geometrici



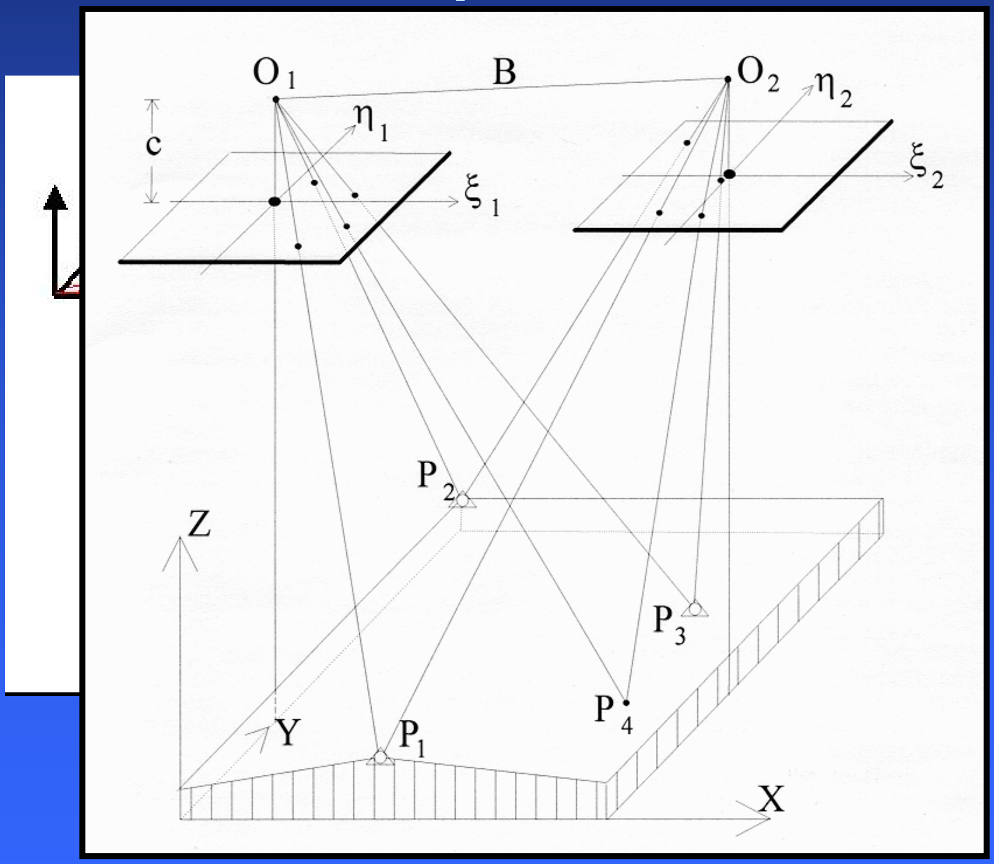
L'immagine è una proiezione centrale



La prospettiva centrale è un procedimento geometrico che trasforma una realtà 3D in una realtà 2D

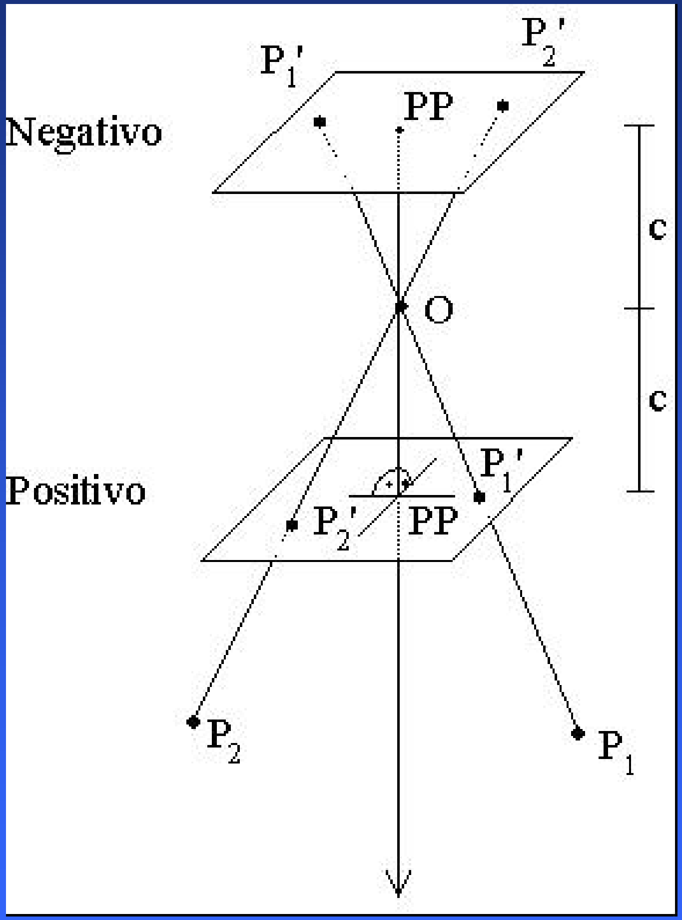
Principi geometrici

Intersezione spaziale = stereoscopia



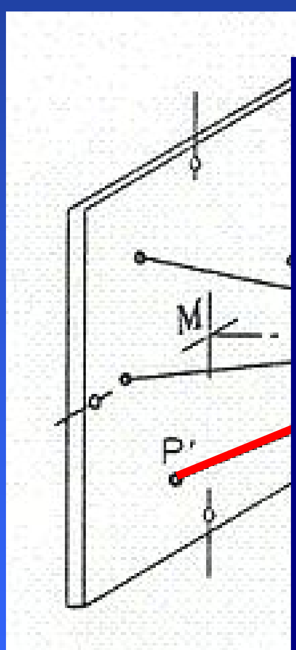
Utilizzando due prospettive centrali di uno stesso punto oggetto, è possibile ricostruire la posizione spaziale del punto stesso.

Schema positivo - negativo



Relazione geometrica: collinearità

Un punto sull'oggetto (P) il centro di proiezione (O) e il corrispondente punto sull'immagine (P') sono su una **stessa retta**



… quasi :

la proiezione centrale è affetta da distorsioni causate da

-distorsioni lenti

-distorsioni supporto

-rifrazione atmosferica

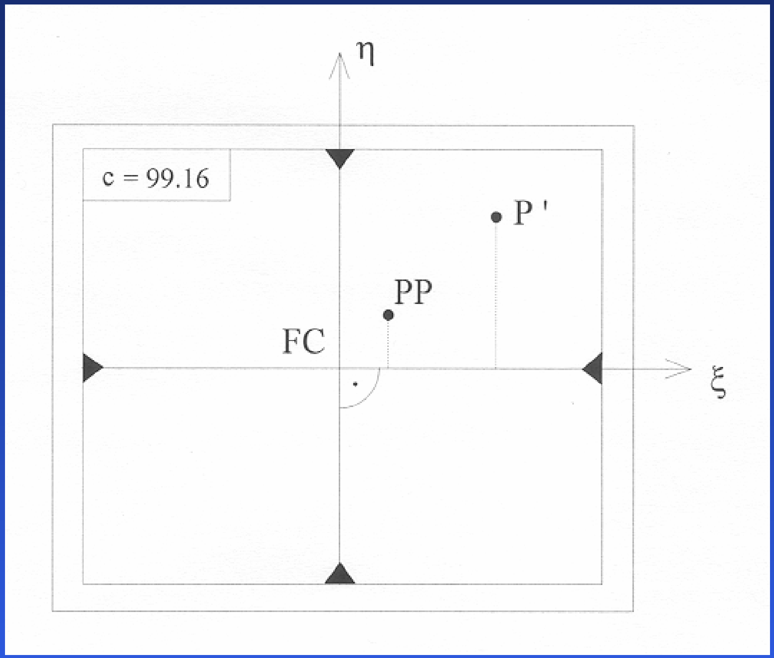
Definizione sistemi di coordinate

- Sistema di coordinate immagine

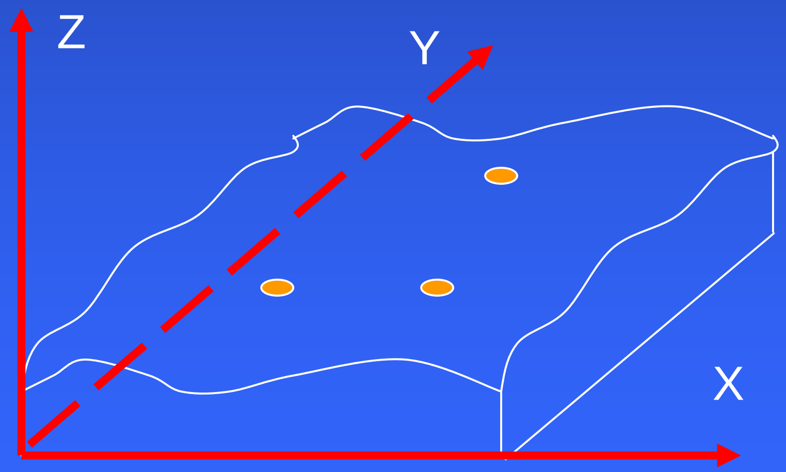
ξ = direz.volo

η = ortogonale

PP = (ξ_0,η_0)



- Sistema di coordinate oggetto



X circa = E

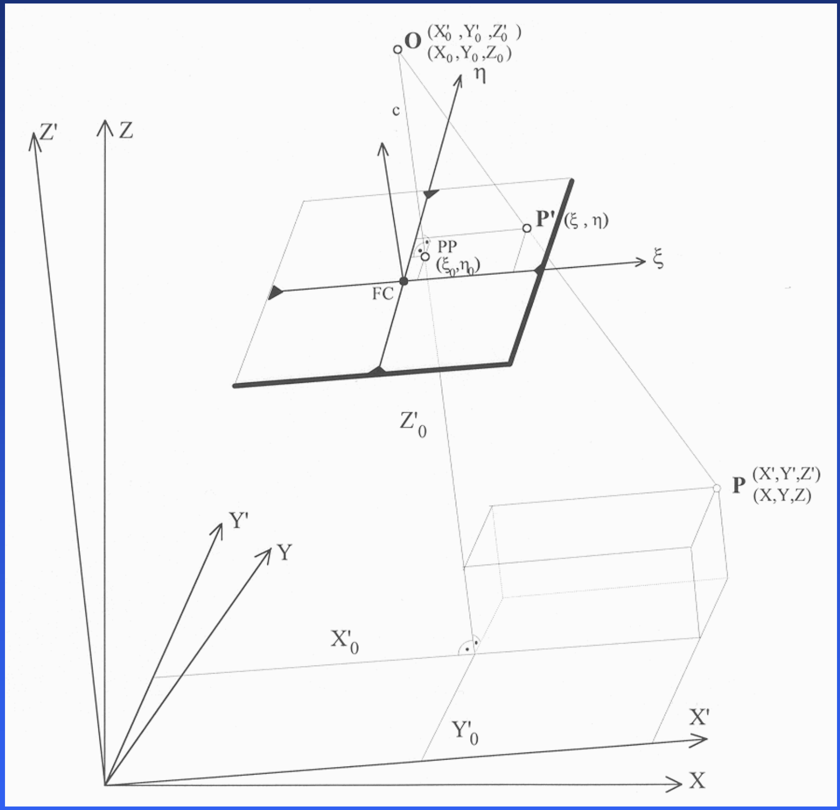
Y circa = N

Z circa = H

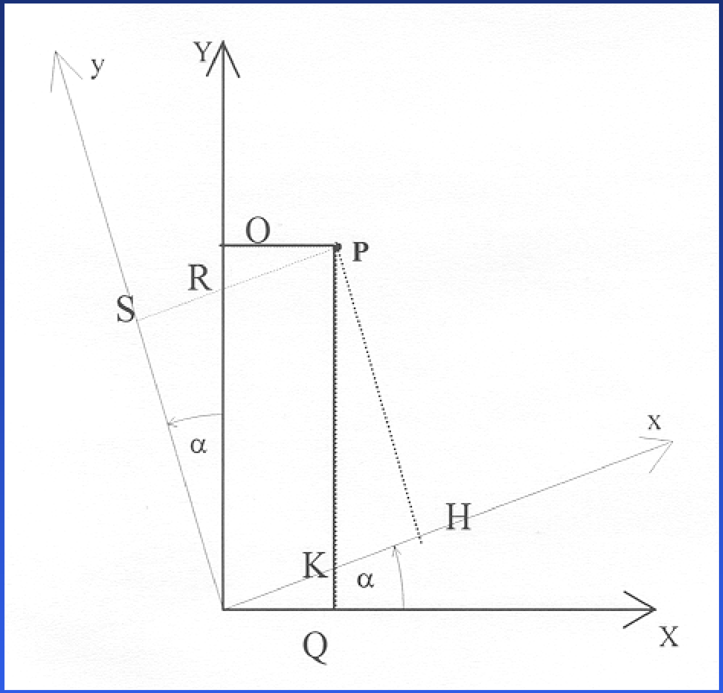
Trasformazioni tra sistemi di riferimento

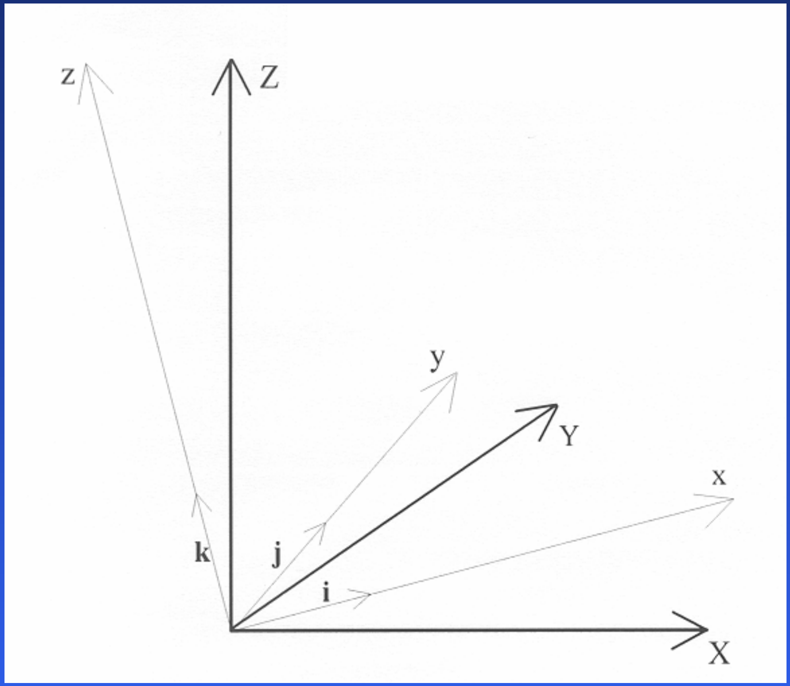
- Per ricavare le equazioni si utilizzano trasformazioni tra i due sistemi di riferimento

- Le trasformazioni sono traslazioni e rotazioni nello spazio



Rotazioni 2 D e 3 D

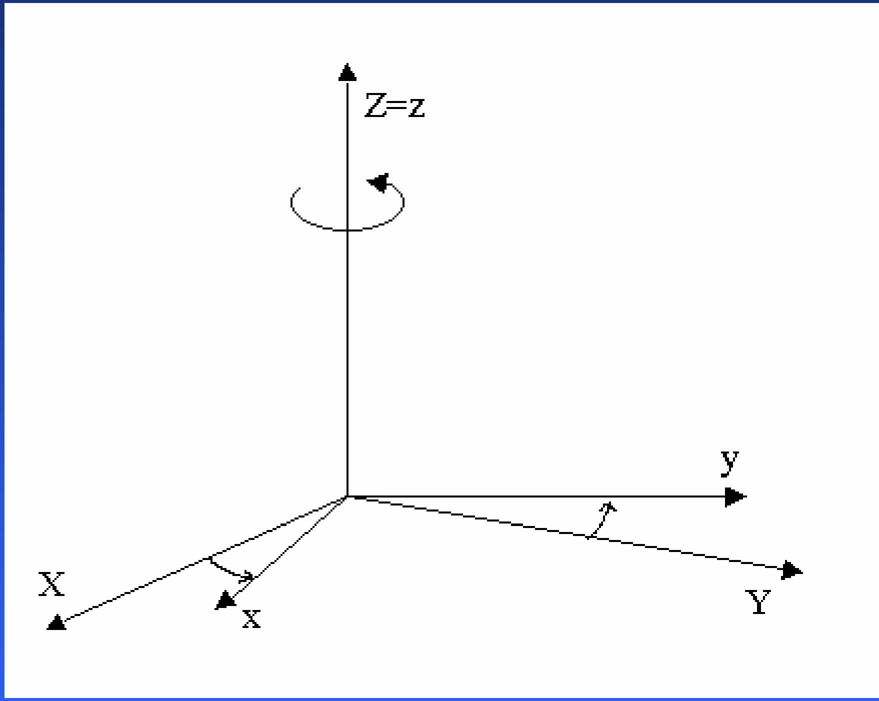




$$R = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX \\ \cos xY & \cos yY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix}$$

Rotazioni



- Un caso semplice di rotazione nello spazio

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rotazioni 3 D

$$R = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Per i versori i,j,k valgono **3 condizioni di ortogonalita'**
3 condizioni di normalizzazione

PERCIO' SOLO 3 DEI 9 PARAMETRI r_{ij} DELLA MATRICE SONO INDIPENDENTI

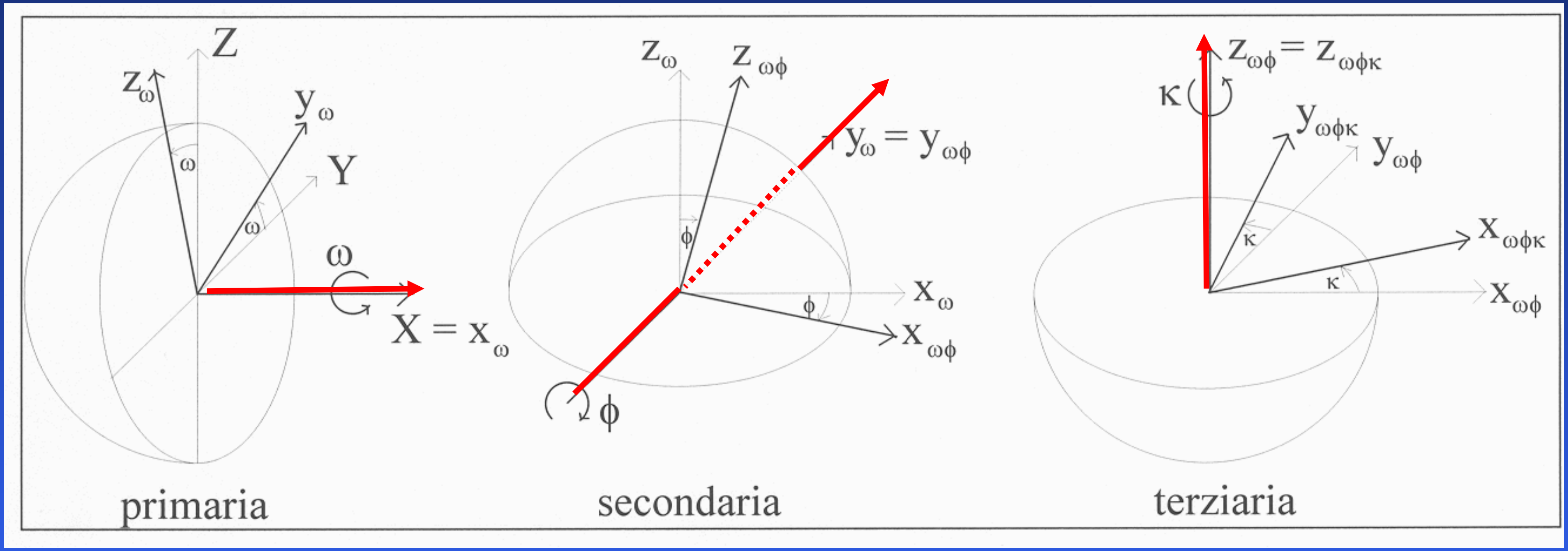
=

e' sufficiente fissare tre angoli per definire la trasformazione

LA MATRICE è ORTONORMALE ←→ L' INVERSA COINCIDE CON LA TRASPOSTA

$$\mathbf{R^{-1}=R^T}$$

una rotazione nello spazio si può scomporre in tre rotazioni piane



$$\begin{pmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

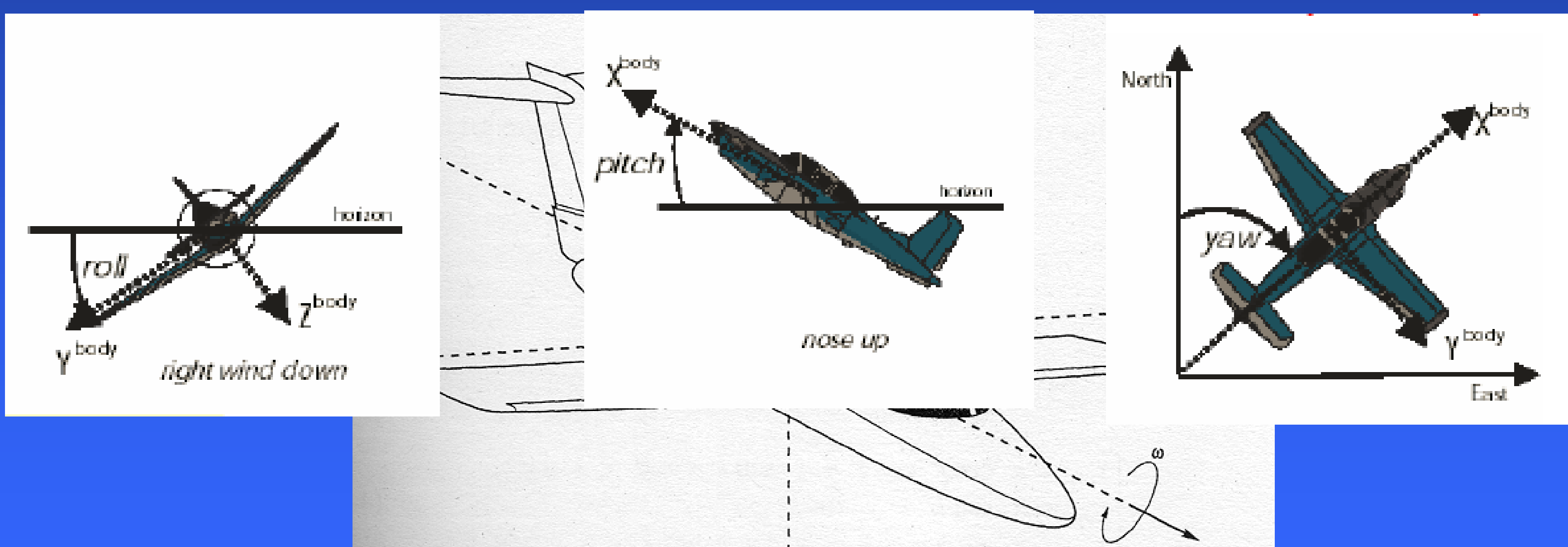
$$\begin{pmatrix} x_{\omega\phi} \\ y_{\omega\phi} \\ z_{\omega\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\omega\phi\kappa} \\ y_{\omega\phi\kappa} \\ z_{\omega\phi\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \operatorname{sen}\kappa & 0 \\ -\operatorname{sen}\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\omega\phi} \\ y_{\omega\phi} \\ z_{\omega\phi} \end{pmatrix}$$

Rotazioni 3 D

composizione d tre rotazioni piane
(corrispondenti a tre movimenti dell'aereo)

- primaria (rollio) — ω intorno asse X
- secondaria (beccheggio) — ϕ intorno asse Y_{ω}
- terziaria (deriva) — κ intorno asse $Z_{\omega\phi}$



Rotazioni 3 D

rotazione complessiva

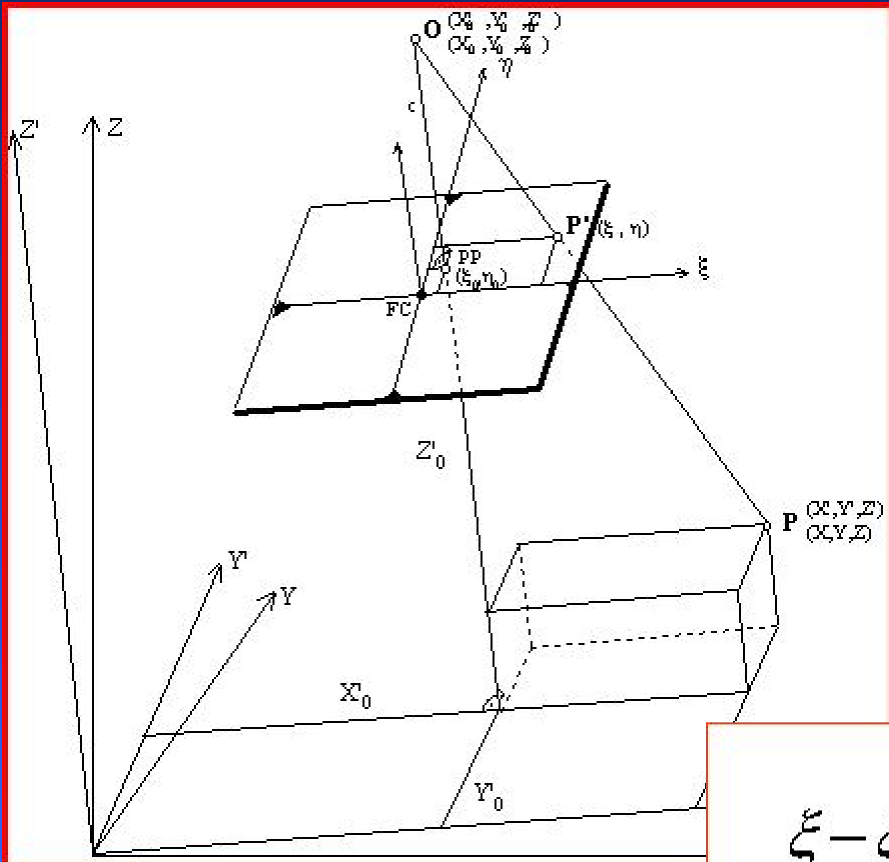
$$\mathbf{X'} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = R_\kappa R_\phi R_\omega\ \mathbf{X}$$

Attenzione: prodotto non commutativo !

$$R^{-1} = R_\kappa R_\phi R_\omega =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\kappa\cos\phi & \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega + \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa & \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa - \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\omega \\ -\mathrm{sen}\,k\cos\phi & \cos\kappa\cos\omega - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa & \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\kappa + \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\omega \\ \mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\omega\cos\phi & \cos\phi\cos\omega \end{pmatrix}$$

Collinearità



Ponendo $\zeta = 0$ le condizioni di collinearità che esprimono l'allineamento tra i tre punti diventano

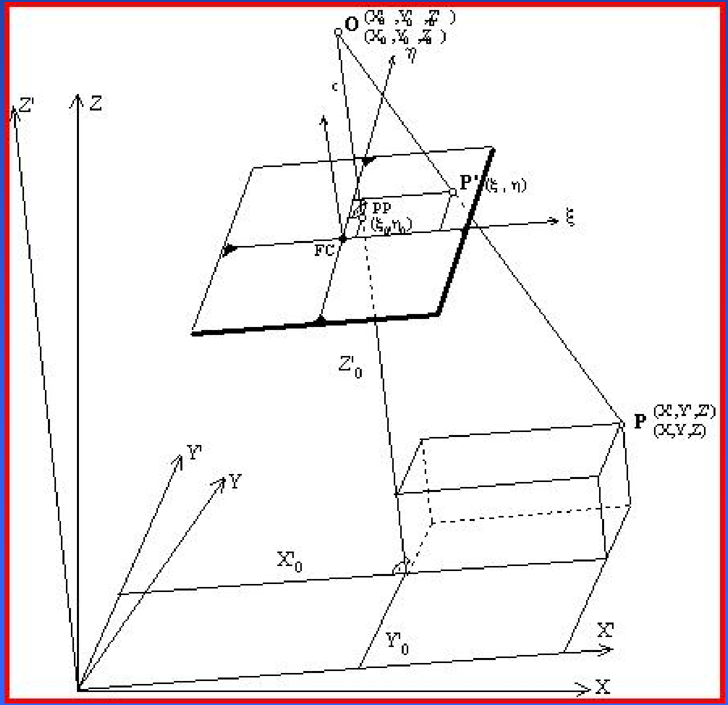
$$\frac{\xi - \xi_0}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z'_0 - Z'} \qquad \frac{\eta - \eta_0}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z'_0 - Z'}$$

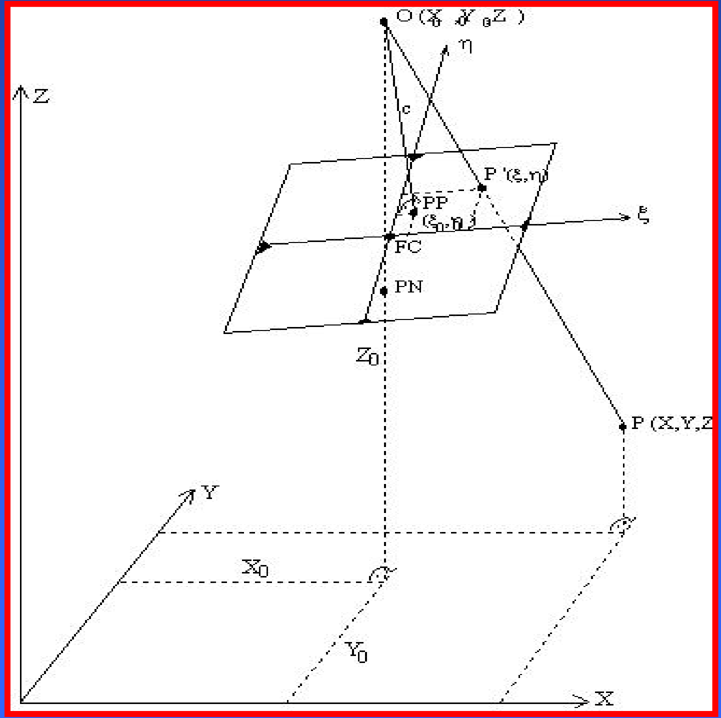
Collinearità

$$\frac{\xi-\xi_0}{c}=\frac{X'-X'_0}{Z'_0-Z'} \qquad \frac{\eta-\eta_0}{c}=\frac{Y'-Y'_0}{Z'_0-Z'}$$

Occorre infine riportare il sistema terreno ruotato X',Y',Z', nel sistema terreno vero e proprio X,Y,Z.

E' sufficiente applicare la rotazione tra i due sistemi





E’ sufficiente applicare la matrice di rotazione:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\kappa \cos\phi & -\operatorname{sen} k \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \cos\kappa \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega + \cos\omega \operatorname{sen}\kappa & \cos\kappa \cos\omega - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\kappa & -\operatorname{sen}\omega \cos\phi \\ \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\kappa - \cos\kappa \operatorname{sen}\phi \cos\omega & \cos\omega \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\kappa + \cos\kappa \operatorname{sen}\omega & \cos\phi \cos\omega \end{pmatrix}$$

QUESTA COINCIDE CON LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE DA (X’, Y’, Z’) (parallelo a (ξ,η,ζ) e centrato in O) A (X,Y,Z)

Cioè sostituire :

$$\begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Ricavando le coordinate immagine si ottengono le equazioni di collinearità nella forma

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Parametri di Orientamento Interno

c distanza principale (costante della camera)

ξ_0, η_0, coordinate del punto principale

Parametri di Orientamento Esterno

X_0, Y_0, Z_0 coordinate assolute del centro di presa

ω, ϕ, κ, tre rotazioni d'assetto

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Utilizzo delle equazioni nelle tre fasi

$$\xi = \xi_0 - c\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Da coordinate oggetto a coordinate immagine ➔ acquisizione

Determinazione parametri di or. esterno ➔ orientamento

Da coordinate immagine a coordinate oggetto ➔ restituzione

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

Ad ogni punto oggetto corrisponde un solo punto immagine

$$\xi = \xi_0 - c\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Le equazioni possono essere esplicitate rispetto alle coordinate terreno, ma....

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

Ad ogni punto immagine possono corrispondere infiniti punti oggetto

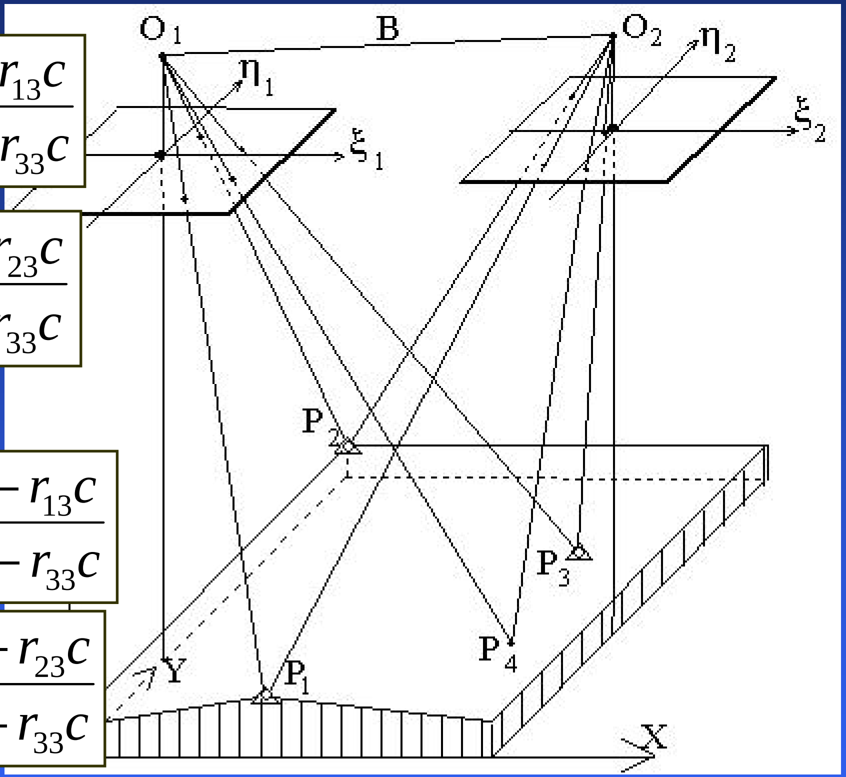
Per questo occorrono più immagini

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01}) \frac{r_{11}(\xi_1 - \xi_0) + r_{12}(\eta_1 - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi_1 - \xi_0) + r_{32}(\eta_1 - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_{01} + (Z - Z_{01}) \frac{r_{21}(\xi_1 - \xi_0) + r_{22}(\eta_1 - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi_1 - \xi_0) + r_{32}(\eta_1 - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$X = X_{02} + (Z - Z_{02}) \frac{r_{11}(\xi_2 - \xi_0) + r_{12}(\eta_2 - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi_2 - \xi_0) + r_{32}(\eta_2 - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_{02} + (Z - Z_{02}) \frac{r_{21}(\xi_2 - \xi_0) + r_{22}(\eta_2 - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi_2 - \xi_0) + r_{32}(\eta_2 - \eta_0) - r_{33}c}$$



una coppia di punti omologhi = 4 equazioni

Parametri di Orientamento Esterno

Per un fotogramma ho 6 parametri di O.E. incogniti

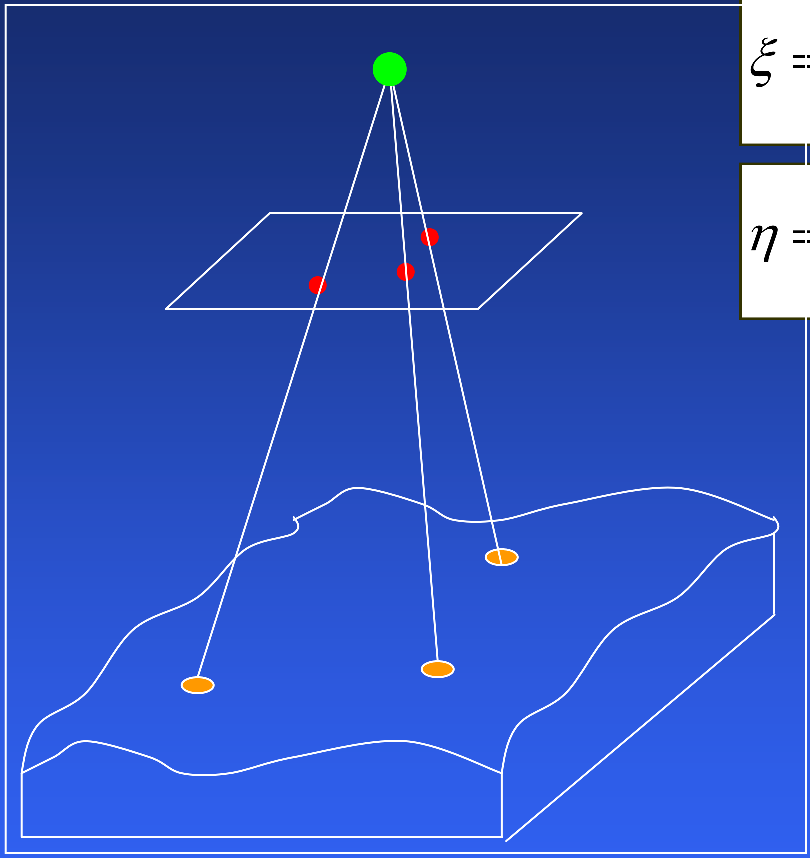
Se misuro le coordinate terreno (X,Y,Z) di un punto, e misuro le coordinate immagine (ξ,η) del corrispondente punto sul fotogramma, posso scrivere due equazioni

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

Per determinare i parametri di orientamento esterno OCCORRONO ALMENO 3 PUNTI NOTI A TERRA

Con tre punti di appoggio : vertice di piramide



$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X-X_0)+r_{21}(Y-Y_0)+r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X-X_0)+r_{22}(Y-Y_0)+r_{32}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0)+r_{23}(Y-Y_0)+r_{33}(Z-Z_0)}$$

Ogni punto di appoggio produce una coppia di equazioni nelle 6 incognite di O.E.

Se ne usano di solito di più, per avere ridondanza di osservazioni e dare la precisione di stima dei parametri.

NOTI I i 12 PARAMETRI POSSO RICAVARE LE COORDINATE OGGETTO DI OGNI PUNTO DI CUI MISURO LE COORDINATE IMMAGINE ξ,η (sulle due immagini)